

Um nada de Topologia

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 Um nada sobre a topologia de $\mathbb{R}^n$

Durante o estudo dos módulos *Espaços vetoriais completos* e *Teoremas de ponto fixo*, surgiram algumas dúvidas que eu não antecipara, por pensar que todos sabiam o que significam, em matemática, palavras como aberto, fechado, compacto, etc. Esses conceitos admitem generalizações extremamente amplas em Topologia, o que causou um problema inesperado: alguns alunos foram atrás de aprendê-los e caíram nas definições as mais gerais, legíveis as menos.

Por esse motivo, resolvi apresentá-los aqui de uma maneira rápida, mas ainda assim com definições utilizáveis, ou seja, com definições precisas que estejam corretas do ponto de vista topológico (ainda que em casos muito particulares, de intervalos em $\mathbb{R}$ e regiões em $\mathbb{R}^n$) e que permitam seu uso em demonstrações de teorema, sem recorrer a explicações tangenciais que, ao fim e ao cabo, desinformam mais que informam.

Então vamos lá. Sabe o intervalo do tipo

$$(a, b) \subset \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

que o seu professor do Ensino Médio chamou de aberto? O que ele tem de especial é o seguinte: se você pegar qualquer ponto x_0 lá dentro, ainda assim ele é um ponto interior, ou seja, ele tem uma gordurinha de um lado e de outro tal que um pequeno intervalinho $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ainda esteja contido em (a, b) .

Definição 1.1 (Conjunto aberto). Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que A é aberto se, para todo $x_0 \in A$, existir um $\varepsilon > 0$ tal que a bola de centro x_0 e raio ε ,

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| < \varepsilon\},$$

esteja contida em A .

Esse tipo de conjunto é chamado de aberto porque uma sequência dentro dele pode escapar para fora. Se tomarmos a sequência $x_n = a + \frac{1}{n+N}$ com um $N > 0$ suficientemente grande tal que $x_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ela estará inteiramente contida em (a, b) ; no entanto, o limite dela é a , $x_n \rightarrow a$ se $n \rightarrow \infty$ (pois $\frac{1}{n+N} \rightarrow 0$), e o próprio a não está contido no intervalo aberto (a, b) , ou seja, no limite, a sequência escapa.

Se tivéssemos um intervalo do tipo

$$[a, b] \subset \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\},$$

que o seu professor chamou de fechado, então a sequência não teria como escapar. Com efeito, dada uma sequência $(x_n) \subset [a, b]$, i.e., tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo n , é possível mostrar que, se a sequência convergir para algum x , então $a \leq x \leq b$ (faça).

Definição 1.2 (Conjunto fechado). Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que A é fechado se, dada uma sequência $(x_k) \subset A$ que convirja para um limite $x \in \mathbb{R}^n$, então necessariamente $x \in A$.

Exercício 1.1. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é aberto. Em seguida, mostre que $\mathbb{R}^n$ é fechado.

Exercício 1.2. Mostre que, em $\mathbb{R}^n$, o vazio $\emptyset$ é sempre aberto. Em seguida, mostre que é sempre fechado.

Acabou.

Só algumas observações:

Definição 1.3 (Conjunto compacto). Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que A é compacto se for limitado e fechado.

Observação 1.1. É importante atentar ao fato que essa definição só é válida para $\mathbb{R}^n$ e coisas parecidas.

Exercício 1.3. Lembre-se sempre que a Definição 1.3 só é válida para $\mathbb{R}^n$ e coisas parecidas.

Observação 1.2. Para ajudá-lo a lembrar que a Definição 1.3 só é válida para $\mathbb{R}^n$ e coisas parecidas, eu ia até dizer o que é um compacto no caso mais geral, mas aí eu comecei a escrever e ficou longo.

Vamos a alguns fatos que usaremos, apresentados sem demonstração.

Proposição 1.4. Se a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for contínua, então dentro de cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ ela atinge seu máximo; em outras palavras, sempre existe $x_0 \in K$ tal que $\|f(x_0)\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$.

Corolário 1.5. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ for contínua, então dentro de cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ ela é limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq k$ para todo $x \in K$.

Demonstração. Exercício. Use a proposição. ■

E agora um fato bonito que usaremos para a aula de amanhã:

Proposição 1.6. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e fechado. Então ou $A = \emptyset$, ou $A = \mathbb{R}$.

Demonstração. Desafio. Dica: repare que um conjunto é aberto (respectivamente, fechado), se e somente se seu complementar for fechado (aberto). ■

Observação 1.3. Essa propriedade de um espaço, de somente admitir dois subespaços ao mesmo tempo abertos e fechados, o vazio e si mesmo, é típica de conjuntos chamados conexos. Não vou falar muito disso, apenas comentar que, na reta, os conjuntos conexos são os intervalos. Olhando para um intervalo I não como subconjunto de $\mathbb{R}$, mas como espaço total, podemos ter as noções de subconjunto de I fechado ou aberto em I , e não na reta inteira. É fácil ver que I é sempre aberto e fechado em si mesmo, e a proposição acima pode ser generalizada para dizer que os únicos subconjuntos de um intervalo I que sejam ao mesmo tempo abertos e fechados são o próprio I e, é claro, o vazio $\emptyset$. Verifique se essa propriedade continua válida para um subconjunto da reta que não seja um intervalo, digamos $A = (a, b) \cup (c, d)$, com $b < c$ estritamente, e você entenderá o que a palavra “conexidade” tem a ver com essa história.