

Solução geral de EDOs

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 Solução geral da EDO de primeira ordem

Como vimos, uma EDO da forma

$$u'(x) = F(x, u(x)),$$

com F e $\partial_y F$ contínuas em uma vizinhança de (x_0, u_0) , possui uma única solução local tal que $u(x_0) = u_0$. Isso resultou de uma aplicação do teorema do ponto fixo de Banach para a equação de Volterra $u = \mathcal{F}(u)$, em que a função $\mathcal{F}(u)$ é dada, para todo x numa vizinhança Ω de x_0 , por

$$(\mathcal{F}(u))(x) = u_0 + \int_{x_0}^x F(t, u(t)) dt.$$

Ora, esse mesmo teorema ensina a calcular o ponto fixo de $\mathcal{F}$ a partir de aplicações sucessivas da própria $\mathcal{F}$, $u_n = \mathcal{F}(u_{n-1})$ (u_0 é qualquer função contínua na vizinhança $\Omega \times I$ de (x_0, u_0) , podendo ser inclusive a função constante $u_0(x) = u_0$), o que resulta em uma sequência de funções convergente na norma do supremo para a solução da EDO, $u_n \rightarrow u$, que é o mesmo que dizer que $\sup_{x \in \Omega} |u_n(x) - u(x)| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Conhecemos até mesmo a taxa de convergência da sequência de aproximações para a solução:

$$\|u_n - u\|_\infty \lesssim \left(r \sup_{(x,y) \in \Omega \times I} |\partial_y F(x, y)| \right)^n,$$

em que r é o raio do intervalo em torno de x_0 em que a existência e unicidade da solução é assegurada.

Localmente, *i.e.*, para $r < \sup_{(x,y) \in \Omega \times I} |\partial_y F(x, y)|$, estamos falando de uma taxa de convergência exponencial, o que parece bom do ponto de vista computacional. No entanto, n aplicações da $\mathcal{F}$, sem nenhum tratamento ulterior, significa em princípio o cálculo de n integrais:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^2(u))(x) &= u_0 + \int_{x_0}^x F(t_1, (\mathcal{F}(u))(t_1)) dt_1 \\ &= u_0 + \int_{x_0}^x F\left(t_1, u_0 + \int_{x_0}^{t_1} F(t_2, u(t_2)) dt_2\right) dt_1, \end{aligned}$$

e, mais geralmente,

$$(\mathcal{F}^n(u))(x) = u_0 + \int_{x_0}^x F\left(t_1, u_0 + \int_{x_0}^{t_1} F\left(t_2, \dots \int_{x_0}^{t_{n-1}} F(t_n, u(t_n)) dt_n \dots\right) dt_2\right) dt_1, \quad (1)$$

o que pode tornar-se extremamente custoso em termos numéricos, se precisarmos de uma aproximação de ordem muito alta.

Exercício 1.1. Calcule as primeiras aproximações para as soluções da EDO $u'(x) = u(x)$ com $u(0) = 1$, cuja solução exata você conhece, e compare-as. Repita o procedimento chutando várias funções iniciais v distintas.

Exercício 1.2. Compare, no caso autônomo (quando $F(x, y) = f(y)$ para alguma $f : \mathbb{R} \ni y \mapsto f(y) \in \mathbb{R}$), a aproximação $u_n = \mathcal{F}(u_0)$ que parte da aproximação inicial constante $v(x) = u_0$ com o polinômio de Taylor de ordem n de u em torno de x_0 . Avalie a diferença entre essas expressões em termos da norma $\|\cdot\|_\infty$.

2 Soluções de EDOs lineares homogêneas de primeira ordem

O procedimento de aproximações sucessivas receitado pelo teorema do ponto fixo de Banach não é completamente sem interesse do ponto de vista teórico, apesar da cara de poucos amigos da fórmula (1). Vamos considerar uma equação diferencial linear homogênea, ou seja, com $F(x, y)$ linear na variável y :

$$u'(x) = A(x)u(x),$$

em que $x \mapsto A(x)$ é uma função a valores matriciais; em outras palavras, é uma transformação linear com coeficientes variáveis. Aplicando a (1), com chute inicial $v(x) = u_0$ constante:

$$(\mathcal{F}u)(x) = u_0 + \int_{x_0}^x A(t)u_0 dt = u_0 + \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right) u_0,$$

depois

$$(\mathcal{F}^2 u)(x) = u_0 + \left(\int_{x_0}^x A(t_1)dt_1 \right) u_0 + \left(\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t_1} A(t_1)A(t_2) dt_2 dt_1 \right) u_0,$$

e assim vai até que:

$$(\mathcal{F}^n u)(x) = \sum_{j=0}^n I_j(x, x_0) u_0,$$

em que $I_0(x, x_0) = \mathbb{I}$, $I_1(x, x_0) = \int_{x_0}^x A(t)dt$ e, para $j \geq 2$,

$$I_j(x, x_0) = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t_1} \cdots \int_{x_0}^{t_{j-1}} A(t_1) \cdots A(t_j) dt_j \cdots dt_1. \quad (2)$$

Exercício 2.1. Se você já fez Cálculo III, mostre que, se tivermos $A(t)A(t') = A(t')A(t)$ para todos t, t' entre x_0 e x , então $I_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right)^n$.

O caso em que as matrizes $A(t)$ e $A(t')$ comutam para $t \neq t'$ não é o mais geral possível, mas ainda assim é importante, pois engloba a situação ubíqua de transformações lineares com coeficientes constantes (ou seja $A(t) = A(t')$) e outros casos de coeficientes variáveis que não prejudiquem a comutação de $A(t)$ com $A(t')$, por exemplo se $A(t)$ for sempre diagonal, ou se tiver sempre os mesmos subespaços próprios (o que implica que ela pode ser diagonalizável a partir de uma mudança de coordenadas que não varia em t), etc. Não é incomum referir-se a tais situações como transformações adiabáticas, ou seja, lentas, graduais e seguras, que não misturem os subespaços próprios de $A(t)$.

Assim, assumindo daqui por diante $A(t)A(t') = A(t')A(t)$, ficamos com:

$$(\mathcal{F}^{(n)} u)(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right)^j u_0, \quad (3)$$

que certamente converge à solução da EDO na norma do supremo $\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \|u(x)\|$ (do lado direito, $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana cabível), pelo teorema do ponto fixo de Banach.

Note que, até o momento, somente temos que a série na (3), que é uma série de funções a valores vetoriais, converge na norma das funções vetoriais. No entanto, para todo n podemos pôr u_0 em evidência,

$$\left(\mathcal{F}^{(n)}u\right)(x) = \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\int_{x_0}^x A(t)dt\right)^j\right) u_0,$$

de modo que seria muito conveniente mostrarmos que a série de funções matriciais

$$x \mapsto \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\int_{x_0}^x A(t)dt\right)^j \quad (4)$$

convirja, em algum sentido de funções matriciais, para alguma função matricial $E : x \mapsto E(x)$, pois assim ficaria bastante fácil resolver a EDO com dado inicial $u(x_0) = u_0$, bastaria dizer $u(x) = E(x)u_0$, ou ainda, mais sucintamente, $u = Eu_0$.

Implementar essa ideia é, na verdade, factível, e nem muito difícil, dependendo da quantidade de informação que temos sobre Análise Funcional. Já sabemos, por exemplo, que os espaços vetoriais de matrizes admitem várias normas, e são completos em relação a elas. Façamos, ou melhor, faça:

Exercício 2.2. Considere $\Omega \subset \mathbb{R}$, $M(n)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$, $\|\cdot\|_M$ a norma usual em $M(n)$, com a qual ele fica completo. Defina:

$$C(\Omega, M(n)) = \left\{ A : \Omega \longrightarrow M(n), A \text{ é contínua e } \sup_{x \in \Omega} \|A(x)\|_M < \infty \right\}.$$

Mostre que $C(\Omega, M(n))$ é um espaço de Banach em relação à norma $\|A\|_{M,\infty} = \sup_{x \in \Omega} \|A\|_M$. Dica: o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua, não apenas para funções reais, mas para funções entre dois espaços normados; a fim de mostrá-lo, lembre-se da prova no caso real e “traduza-a” passo a passo para o caso de espaços vetoriais com norma.

Exercício 2.3. Verifique que a sequência com termo geral (4) está em $C(K, M(n))$ e é de Cauchy, para algum intervalo $K \subset \mathbb{R}$ compacto contendo x_0 onde exista a solução u . Conclua que ela possui um limite, no sentido de convergir na norma das funções matriciais $\|\cdot\|_{M,\infty}$ a um elemento do próprio $C(K, M(n))$.

Exercício 2.4. Se não deu para fazer o exercício 2.2, paciência. Pelo menos, mostre que a série (4) converge pontualmente para uma função matricial, para todo $x \in K$, em que $K \subset \mathbb{R}$ é um compacto contendo x_0 .

Feitos esses exercícios, ganhamos o direito de escrever:

$$u(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\int_{x_0}^x A(t)de\right)^j\right) u_0;$$

antes, não tínhamos certeza se o limite dentro dos parênteses fazia sentido, apenas que a série de funções vetoriais dada por matrizes aplicadas a um vetor estava bem definida. Agora, temos certeza de que a coisa em parênteses é uma função matricial e, por motivos psicológicos, vamos denotá-la por $e^{\int_{x_0}^x A(t)dt}$. Com efeito, dada uma matriz $A \in M(n)$, é sempre possível definir uma outra matriz por meio do limite da série $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$, a que se dá o nome de exponencial da matriz A , e denota-se e^A .

Exercício 2.5. Não acredita nessa história de convergência? Tudo bem. Dada uma matriz A , pode-se definir o fluxo exponencial de A , $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in M(n)$, como a solução da EDO a valores matriciais $M'(x) = AM(x)$ com dado inicial $M(0) = \mathbb{I}$; por existência e unicidade,

a exponencial assim obtida estará bem definida em uma vizinhança de x_0 ; pela limitação da função característica da EDO, $F(x, M) = A$ constante, a solução será global (lembre-se da aula!), portanto o fluxo exponencial estende-se a $\mathbb{R}$ e, em particular, podemos calculá-lo em $x = 1$, definindo a exponencial e^A da matriz A .

Ou seja, dada uma EDO linear $u'(x) = A(x)u(x)$ tal que $A(t)A(t') = A(t')A(t)$, com condição inicial $u(x_0) = u_0$, sua solução é conhecida e razoavelmente simples de calcular (seja numericamente, seja explicitamente, usando as ferramentas de Álgebra Linear adequadas, como diagonalização, forma de Jordan, etc.):

$$u(x) = e^{\int_{x_0}^x A(t)dt} u_0;$$

no caso de coeficientes constantes, temos simplesmente $u(x) = e^{(x-x_0)A} u_0$.

3 Soluções de EDOs lineares não homogêneas de primeira ordem

Considere uma EDO linear não homogênea, isto é, linear, mas com um termo fonte f :

$$u'(x) = A(x)u(x) + f(x),$$

Vamos procurar uma solução com dado inicial $u(x_0) = u_0$. Supondo que $A(t)A(t') = A(t')A(t)$ para todo t, t' entre x_0 e x , calculamos sua solução por meio do algoritmo do ponto fixo de Banach e obtemos:

$$u(x) = e^{\int_{x_0}^x A(t)dt} u_0 + \int_{x_0}^x e^{\int_t^x A(t')dt'} f(t)dt. \quad (5)$$

Exercício 3.1. Faça os cálculos.

4 Solução geral de EDOs lineares de primeira ordem

Antes de fazermos a hipótese de comutação das matrizes $A(t)$ e $A(t')$, já havíamos obtido, por meio do teorema do ponto fixo de Banach e de um certo trabalho algébrico, que a série $x \mapsto \sum_{j=0}^n I_j(x, x_0)u_0$ converge uniformemente enquanto função vetorial para a solução u da EDO $u'(x) = A(x)u(x)$. Será que, a exemplo do que fizemos antes, é possível mostrar que a série de funções matriciais $x \mapsto \sum_{j=0}^n I_j(x, x_0)$ converge sozinha?

Exercício 4.1. Repare que

$$\|I_j(x, x_0)\|_M \leq \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t_1} \cdots \int_{x_0}^{t_{j-1}} \|A(t_1)\|_M \cdots \|A(t_j)\|_M dt_j \cdots dt_1$$

e use o resultado do exercício 2.1 para demonstrar que

$$\|I_j(x, x_0)\| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} \sup_{t \in [x, x_0] \cup [x_0, x]} \|A(t)\|_M^n.$$

Exercício 4.2. Seja $K \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto contendo x_0 onde exista a solução u . Use o exercício anterior e a completeza de $C(K, M(n))$ (veja exercício 2.2) para mostrar que a série $x \mapsto \sum_{j=0}^n I_j(x, x_0)$ converge em $C(K, M(n))$. Dica: prove separadamente que, em um espaço de Banach, uma série $\sum a_n$ que convirja absolutamente (i.e., cuja série das normas $\sum \|a_n\|$ convirja em $\mathbb{R}$) é convergente.

Exercício 4.3. Ponha $T(x, x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j(x, x_0)$. Mostre as seguintes propriedades de T :

1. $\partial_x T(x, x_0) = A(x)T(x, x_0)$ para todo $x_0 \in K$;

2. $T(x_0, x_0) = \mathbb{1}$;
3. $T(x, t)T(t, x_0) = T(x, x_0)$ para todo $t \in K$;
4. $T(x, x_0) = (T(x_0, x))^{-1}$.

Dica: lembre-se que $u(x) = T(x, x_0)u_0$ resolve o problema de valor inicial de maneira única no intervalo K .

A função T é chamada de fator integrante da EDO linear, e, no caso homogêneo, sua solução geral com dado inicial $u(x_0) = u_0$ é dada por:

$$u(x) = T(x, x_0)u_0.$$

Por fim, no caso não homogêneo $u'(x) = A(x)u(x) + f(x)$ com ponto inicial (x_0, u_0) , teremos:

$$u(x) = T(x, x_0)u_0 + \int_{x_0}^x T(x, t)f(t)dt,$$

que é o análogo da equação (5), naquele caso com a hipótese $A(t)A(t') = A(t')A(t)$, e pode ser obtida da mesma maneira, por meio do algoritmo do ponto fixo de Banach, ou, mais facilmente, por simples verificação:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \partial_x T(x, x_0)u_0 + \partial_x \left(\int_{x_0}^x T(x, t)f(t)dt \right) \\ &= A(x)T(x, x_0)u_0 + T(x, x)f(x) + \int_{x_0}^x \partial_x T(x, t)f(t)dt \\ &= A(x) \left(T(x, x_0)u_0 + \int_{x_0}^x T(x, t)f(t)dt \right) + f(x) \\ &= A(x)u(x) + f(x). \end{aligned}$$

Nos casos mais favoráveis, teremos $T(x, x_0) = e^{\int_{x_0}^x A(t)dt}$, mas às vezes o fator integrante, embora exista, pode ser muito complicado para calcular explicitamente, e mesmo muito custoso para ser encontrado de maneira numérica com boa aproximação (mesmo a exponencial pode ser trabalhosa). Por essa razão, ainda que dispondo de resultados de existência, unicidade, ainda que de soluções explícitas e algoritmos numéricos, faz-se necessário estudar as equações com abordagens indiretas, a fim de compreender as propriedades de suas soluções sem precisar obtê-las. É o que você já está fazendo na atividade *Análise qualitativa de EDOs*.

5 Solução geral de EDOs lineares de ordem superior

Você já deve ter ouvido falar, ao longo da graduação (se não em Física I, certamente em Mecânica I), que a solução geral de uma EDO linear homogênea de ordem n escreve-se como a combinação linear de n soluções particulares linearmente independentes. O exemplo canônico é a equação do oscilador harmônico:

$$u''(x) + \omega^2 u(x) = 0, \tag{6}$$

cujo termo geral é dado por

$$u(x) = k_1 \cos(\omega x) + k_2 \sin(\omega x),$$

com k_1, k_2 constantes a fixar (já vimos o porquê da solução de um problema de valor inicial de ordem n depender de n constantes para ficar univocamente determinada).

Exercício 5.1. Fixemos essas constantes de uma vez por todas. Mostre que, no caso da EDO linear homogênea de grau n com valores iniciais, tem-se:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(x) u_0^{(j)}, \quad (7)$$

em que $u_0^{(j)} = u^{(j)}(x_0)$, e c_j são funções de x que não dependem de u nem das condições iniciais.

Voltando ao exemplo do oscilador, tanto o seno quanto o cosseno resolvem a equação (6) e são linearmente independentes, no sentido que, se

$$a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) = 0$$

para todo x , então necessariamente $a = b = 0$.

Exercício 5.2. Mostre que as funções c_j do exercício anterior são linearmente independentes e que cada uma resolve a EDO em questão.

Tudo isso mostra, com efeito, que a solução da EDO linear homogênea de grau n é a combinação linear de n soluções particulares linearmente independentes. E o inverso? Se encontrarmos n soluções particulares para essa EDO que sejam independentes, será que necessariamente a solução geral poderá ser escrita como uma combinação linear delas?

A resposta é: sim.

Exercício 5.3. Se puder, prove. Se não, reflita bastante sobre isso durante o seu curso de Álgebra Linear I, e no fim do semestre tente de novo.

Observação 5.1. No entanto, atenção! Caso as n soluções particulares que encontrarmos sejam distintas das funções c_j da fórmula (7) (que são as entradas da primeira linha do fator integrante da EDO), seus coeficientes não serão necessariamente as condições iniciais.