

Métodos de pesquisa em EDPs lineares

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 Funções de crescimento controlado

Conforme discutimos longamente em aula, os problemas diferenciais com derivadas parciais necessitam da prescrição de condições de contorno para ficarem bem postos: quando se resolve uma EDP em um domínio compacto, fazíamos hipóteses acerca do comportamento das soluções sobre a fronteira e, para domínios maiores como a reta ou $\mathbb{R}^n$, vimos que tais condições de borda podem ser substituídas por imposições sobre o crescimento das funções. Alguns dos espaços mais úteis, na minha vida, têm sido:

1. De longe, o espaço das funções de quadrado integrável, do qual apresento uma simplificação:

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Pudera, eu sou uma pessoa que mexe com equação de Schrödinger... A simplificação de que falei está no fato de que esse espaço admite uma seminorma muito importante:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx},$$

a qual pode ser transformada em uma norma verdadeira se identificarmos, por meio de uma relação de equivalência, funções tais que $\|f - g\| = 0$; os verdadeiros espaços L^2 são espaços de classes de equivalência de funções segundo essa relação. De qualquer maneira, os elementos dessas classes certamente são funções que tendem a 0 pelo menos tão rápido quanto $\frac{1}{\|x\|^{\frac{n}{2}+\varepsilon}}$ ($\varepsilon > 0$ é qualquer) quando $x \rightarrow \infty$, do contrário não se poderia ter $\|f\|_{L^2} < \infty$.

2. O espaço das funções regulares de suporte compacto:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto, tal que } f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K \}.$$

É claro que essas funções não podem crescer muito, pois se elas são nulas para fora de um compacto, nesse compacto elas atingem seu máximo, e para x grande já teremos saído de qualquer conjunto limitado, então as funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ não apenas decrescem, como de fato zeram “antes que assintoticamente”.

A utilidade desses espaços para mim está no fato de que eu tenho feito nos últimos anos análise microlocal de EDPs, ou seja, procuro conhecer o comportamento de suas soluções em regiões onde elas dão problema, e uma boa maneira de fazer isso é testá-las contra funções que tenham suporte apenas nessa região (isto é, tomar médias delas integrando-as com funções C_0^∞); a compacidade do suporte é importante para apagar efeitos das soluções que sejam de fora da região em que estou interessado, e a regularidade perfeita é para compensar os defeitos das próprias soluções, pois se eu tiver algo muito irregular em mãos, aí começa a ficar difícil fazer alguma análise útil.

3. Espaços de Schwarz (o inventor das distribuições):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta f(x)| < \infty \right\};$$

relembrando a notação de multiíndices: para um vetor de n componentes $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e um multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, denotamos:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad \partial_x^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f(x).$$

Claramente, uma função de Schwarz, além de ser perfeitamente regular, ainda decresce mais rápido do que qualquer polinômio, e todas as suas derivadas também decrescem mais rápido do que qualquer polinômio. Quem esteve na última aula do curso já está desconfiando da utilidade desse requerimento: é que as transformadas de Fourier de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ também serão infinitamente diferenciáveis e de decrescimento rápido.

Exercício 1.1. Mostre que a função gaussiana $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comece trabalhando na reta, para $n = 1$.

Uma propriedade extremamente importante dos espaços $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é que eles são densos em espaços de funções maiores, como $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$, ou mesmo no espaço das funções meramente integráveis. Em outras palavras, pode-se escrever uma função desses espaços maiores como o limite, em alguma norma, de uma sequência de funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; ou ainda, se você lembra o que é completamento de um espaço (falamos disso no primeiro módulo), podemos dizer, por exemplo, que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$ são o completamento de espaços como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ utilizando as noções de convergência adequadas.

2 Transformadas de Fourier

Para uma função $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, avaliemos, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, o valor $\hat{u}(\xi)$ da integral:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$$

(em que $\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$). É evidente que precisamos de hipóteses sobre u para que a fórmula acima faça sentido, e uma boa maneira de começar é controlando o crescimento e a integrabilidade de u ; supor $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para não correremos riscos, já resolve. Com efeito, para uma u de Schwarz, $\hat{u}(\xi) < \infty$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e, do mais, a aplicação $\mathbb{R}^n \ni \xi \rightarrow \hat{u}(\xi) \in \mathbb{C}$ também pertencerá a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 2.1. Mostre que o operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por:

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx \tag{1}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ está bem definido.

Observação 2.1. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier de uma função regular com suporte compacto será de Schwarz; no entanto, sabe-se que ela não necessariamente manterá a compacidade do suporte (por quê?).

O operador $\mathcal{F}$ estabelecido no exercício acima é linear (verifique) e possui um inverso, dado por:

$$(\mathcal{F}^{-1}u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} u(\xi) d\xi. \tag{2}$$

Demonstrar que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são inversos não é exatamente fácil, mas, se você quiser tentar, fique à vontade:

Exercício 2.2. Seja $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dado por $(Pu)(x) = u(-x)$. Mostre que $J = P\mathcal{F}\mathcal{F}$ satisfaz a:

$$x^\alpha \partial_x^\beta J u = J \left(x^\alpha \partial_x^\beta u \right),$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ e todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercício 2.3 (Difícil!). Seja $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenhamos $x^\alpha \partial_x^\beta T u = T \left(x^\alpha \partial_x^\beta u \right)$. Então, existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $T = k\mathbb{I}$.

Exercício 2.4. Justifique ser $P\mathcal{F}\mathcal{F} = k\mathbb{I}$ para algum $k \in \mathbb{C}$. Para fixar a constante, tome $u(x) = e^{-\|x\|^2}$ e calcule $P\mathcal{F}\mathcal{F}u$. Conclua que $\mathcal{F}$ é inversível, com inverso dado por $P\mathcal{F}$.

Exercício 2.5. Observe que $\mathcal{F}^{-1}$ definido na equação (2) é precisamente $P\mathcal{F}$.

Agora que já sabemos que a transformada de Fourier está bem definida e é inversível em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos pensar em estendê-la para algum espaço maior, em particular para o das funções de quadrado integrável. Conforme comentamos acima, o espaço de Schwarz é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ segundo a norma $\|\cdot\|_{L^2}$, ou seja, dada $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, encontramos uma sequência $(u_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u - u_n\|_{L^2} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$; dessa maneira, se $\mathcal{F}$ for um operador contínuo no espaço de Schwarz em relação à norma de $\|\cdot\|_{L^2}$, poderemos estendê-lo a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$ pondo:

$$\mathcal{F}u = \lim_n \mathcal{F}u_n. \quad (3)$$

Exercício 2.6. Dada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mostre que $\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$. Conclua que $\|\mathcal{F}\|_{\text{op}} = 1$ ($\|\cdot\|_{\text{op}}$ é a norma dos operadores no espaço de Schwarz munido da norma $\|\cdot\|_{L^2}$).

Ora, para operadores lineares, ser limitado é a mesma coisa que ser contínuo, portanto $\mathcal{F}$ sendo contínuo e $L^2(\mathbb{R}^n)$ um espaço de Banach, é possível encontrar uma única extensão contínua para ele, $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, dada exatamente pela (3). Claramente, a norma operatória dessa extensão permanecerá sendo 1.

Exercício 2.7. Sejam E, F espaços normados, F completo. Dado $A \subset E$ denso em E , dada $f : A \rightarrow F$ uma função contínua, mostre que existe uma única $\tilde{f} : E \rightarrow F$ contínua que estende f , i.e., tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

3 EDPs lineares com coeficientes constantes

A transformada de Fourier é um instrumento de utilidade ímpar para a análise de equações diferenciais, pois, através dela, derivadas são mapeadas em polinômios. Vejamos: tomemos uma função em $\mathbb{R}^2$, $u = u(x, y)$, e suponhamos que satisfaça a uma EDP linear de segunda ordem com coeficientes c_{ij} constantes:

$$c_{20} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{02} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c_{10} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{01} \frac{\partial u}{\partial y} + c_{00} u = f(x, y); \quad (4)$$

ser de segunda ordem significa que na equação podem aparecer derivadas parciais de até segundo grau, por isso nossos coeficientes têm índices i, j tais que $i + j \leq 2$. Ora, se estivermos procurando por soluções com crescimento controlado (em algum dos sentidos discutidos acima), teremos que u é a transformada inversa de alguma $\hat{u}$ (afinal, vimos que o operador $\mathcal{F}$ era inversível, portanto bijetivo):

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\zeta)} \hat{u}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

o que implica no seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\zeta)} (i\xi)^n \hat{u}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \\ \frac{\partial^n u}{\partial y^n}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\zeta)} (i\zeta)^n \hat{u}(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \end{aligned}$$

portanto a equação diferencial sobre u acarreta a seguinte equação algébrica sobre $\hat{u}$:

$$(c_{20}\xi^2 + c_{02}\zeta^2 + c_{11}\xi\zeta - ic_{10}\xi - ic_{01}\zeta - c_{00})\hat{u}(\xi, \zeta) = \hat{f};$$

para tanto, precisamos ter em quase toda parte, se o polinômio em ξ e ζ não apresentar raízes reais:

$$\hat{u}(\xi, \zeta) = \hat{f}(c_{20}\xi^2 + c_{02}\zeta^2 + c_{11}\xi\zeta - ic_{10}\xi - ic_{01}\zeta - c_{00})^{-1},$$

ou, no caso homogêneo $f = \hat{f} = 0$, a fim de não trivializar a solução tomando $\hat{u}(\xi, \zeta) = 0$:

$$c_{20}\xi^2 + c_{02}\zeta^2 + c_{11}\xi\zeta - ic_{10}\xi - ic_{01}\zeta - c_{00} = 0.$$

Essa é a equação de uma cônica e, como vimos em aula, pode ser transformada, após uma mudança de coordenadas conveniente da forma $\mu = M(\xi - \xi_0)$, $\nu = M(\zeta - \zeta_0)$ (M sendo uma matriz de mudança de base em $\mathbb{R}^2$), em uma cônica reduzida: uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, ou degenerar; se as variáveis ξ e ζ obedecem a ela, descrevem uma curva em $\mathbb{R}^2$, portanto há uma dependência (local!) do tipo $\xi = \xi(\zeta)$ ou $\zeta = \zeta(\xi)$, o que pode fornecer informações sobre a u .

Exercício 3.1 (Importante!). Mostre que, para a equação de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \Delta u(x, t)$, obtemos a equação algébrica:

$$\tau^2 = v^2 \xi^2,$$

em que ξ e τ são as variáveis conjugadas, respectivamente, a x e t . Estude as curvas em (ξ, τ) definidas por essa equação e, em seguida, demonstre o conhecido fato de que, dado qualquer perfil inicial $u(x, 0) = f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, as funções $u^\pm(x, t) = f(x \pm vt)$ são soluções do problema diferencial. Dica: quanto vale $\hat{f}(0)$?

Segundo a cônica obtida for uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, temos uma classe de EDPs em $\mathbb{R}^2$ bem estudada, da qual apresentamos modelos famosos:

- **EDP elíptica:** a equação de Laplace no plano (potencial elétrico no vácuo), $\Delta u(x, y) = 0$.
- **EDP parabólica:** a equação do calor na barra, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = K \Delta u(x, t)$.
- **EDP hiperbólica:** a equação de onda na corda, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \Delta u(x, t)$.

Essas não são as formas canônicas das classes de EDP enunciadas, mas possivelmente são as que você vai encontrar com maior frequência ao longo da sua graduação.

4 EDPs lineares com coeficientes variáveis

Duas limitações do que vimos na seção anterior são: para EDPs com coeficientes não constantes as coisas se complicam (tente repetir o que fizemos para $c_{ij} = c_{ij}(x, y)$ e diga você mesmo onde a coisa pega), e para equações em mais variáveis, ou de maior grau, as curvas algébricas ficam mais e mais complicadas. Há um terceiro problema: quem gosta de estudar equações diferenciais, via de regra, detesta álgebra.

É importante respeitar os trabalhos que durante um século e meio basearam-se nas técnicas acima para estudar as equações diferenciais, porém é crucial saber que, desde há algumas décadas, tem sido por outros caminhos que a análise de EDPs vem conseguindo avançar. Já não disse outro Victor que respeita o passado, contanto que consinta em ser passado? É com esse espírito que eu gostaria de terminar o curso afastando-me das ementas usuais de disciplinas de EDOs e EDPs, introduzindo uma nesga da teoria dos operadores pseudodiferenciais.

Se generalizamos para ordens n e d variáveis a EDP linear que havíamos descrito em (4), chegamos na seguinte expressão:

$$Pu = f,$$

em que P é um operador diferencial, formalmente dado por

$$P = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq n}} c_\alpha(x) \partial_x^\alpha,$$

com os multiíndices α tendo módulo no máximo n , $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq n$. Ora, essa expressão lembra muito um polinômio de grau n com coeficientes $c_\alpha(x)$:

$$P(x, \xi) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq n}} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha,$$

e, como descobrimos ao longo deste texto, a transformada de Fourier leva derivadas em potências de $i\xi$. Será que conseguimos relacionar de algum modo preciso P e $P(x, \xi)$? Observemos que $u = \mathcal{F}^{-1}\hat{u}$ se e somente se $\hat{u} = \mathcal{F}u$; mãos à obra:

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq n}} c_\alpha(x) \partial_x^\alpha \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d \\ |\alpha| \leq n}} c_\alpha(x) (i\xi)^\alpha e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} P(x, \xi) e^{ix \cdot \xi} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot y} u(y) dy \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\xi \cdot (x-y)} P(x, \xi) u(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

A fórmula (5) estabelece um procedimento sistemático, chamado de quantização, para que, dado um polinômio em ξ , encontremos o correspondente operador diferencial. A quantização, ademais, não precisa ficar restrita a polinômios, pois poderíamos substituir $P(x, \xi)$ em (5) por qualquer função de $\mathbb{R}^{2d}$ cujo crescimento não estrague a convergência das integrais. Assim, dada uma função $a = a(x, \xi)$, a que chamaremos símbolo, define-se o operador pseudodiferencial de símbolo a , $\text{op}(a)$, por:

$$\text{op}(a)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\xi \cdot (x-y)} a(x, \xi) u(y) dy d\xi; \quad (6)$$

quando o símbolo a for polinomial na variável ξ , então a fórmula de quantização fornece um verdadeiro operador diferencial.

Que requisitos a precisa satisfazer para que o operador definido em (6) faça sentido em algum espaço de funções? Depende do crescimento das funções desse espaço. Se quisermos, por exemplo, aplicá-lo às funções de Schwarz, a pode ter um crescimento até mesmo polinomial, e a integral na fórmula de quantização continua convergindo. Uma típica classe de símbolos encontrada na literatura matemática é a seguinte (tome $\nu \in \mathbb{R}$):

$$\mathcal{A}^\nu = \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}); \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^{2d}} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq K_{\alpha, \beta} \left(1 + \|\xi\|^{\nu - |\beta|} \right), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d \right\};$$

repare que a classe $\mathcal{A}^\nu$ parece ter sido definida sob medida para conter símbolos que emulem o comportamento de polinômios de ordem ν ... No meu trabalho, quase sempre eu uso $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ como classe de símbolos, pois quero aplicar os operadores quantizados em funções de quadrado integráveis, as quais podem deixar de ser L^2 muito facilmente quando multiplicadas e geralmente

não são regulares. Para $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$, temos um $\text{op}(a)$ limitado na norma dos operadores L^2 , então também fica fácil estendê-lo a todo o espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Uma boa característica dos operadores pseudodiferenciais é que conhecemos bem a álgebra que eles formam. Dados símbolos $a \in \mathcal{A}^\nu$, $b \in \mathcal{A}^\mu$ e $k \in \mathbb{C}$: $\text{op}(a) + k \text{op}(b) = \text{op}(c)$, com $c \in \mathcal{A}^{\max\{\mu, \nu\}}$ dado por $c = a + kb$, e $\text{op}(a)\text{op}(b) = \text{op}(c)$, com $c \in \mathcal{A}^{\mu+\nu}$.

Exercício 4.1. Mostre que, se $\text{op}(a)\text{op}(b) = \text{op}(c)$, com $a, b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, então:

$$c(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y) \cdot (\zeta - \xi)} a(x, \zeta) b(y, \xi) dy d\zeta.$$

Essa integral fica bem definida para quais classes de símbolo?

A expressão de c não é tão importante quanto sabermos que o produto de dois operadores pseudodiferenciais ainda é um operador pseudodiferencial, e conhecermos a classe do seu símbolo, a fim de avaliar a ação dele nos espaços de funções que quisermos. Talvez não fique evidente agora, mas é importante ganhar regularidade quando aplicamos um operador a uma função, então é bom que ele seja de classe $\mathcal{A}^\nu$ para ν pequeno, de preferência negativo; o produto, como vimos, de um símbolo de classe $\mathcal{A}^\nu$ com outro de $\mathcal{A}^\mu$ leva-nos a um símbolo em $\mathcal{A}^{\mu+\nu}$, então precisamos ser cuidadosos ao compor muitos operadores.

Outra operação muito importante é o comutador $[\text{op}(a), \text{op}(b)] = \text{op}(a)\text{op}(b) - \text{op}(b)\text{op}(a)$ (você já fez Quântica I?), que entra por exemplo na equação de Heisenberg:

$$\frac{\partial A_t}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, A_t],$$

em que $t \mapsto A_t$ é uma função a operadores limitados em L^2 , e H é outro operador (em geral não limitado, o que é triste), chamado de Hamiltoniano, que modeliza a dinâmica do sistema físico correspondente à equação. Pois, para uma partícula de massa m sob um potencial V , temos:

$$H = \text{op}(E),$$

em que

$$E(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2m} + V(x)$$

é a energia clássica da partícula na posição x e com momento ξ , portanto um símbolo de classe $\mathcal{A}^2$, se o potencial não estragar tudo.

Exercício 4.2. Mostre que $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$. Para sermos completamente corretos, pensemos em V , aqui, como o operador que multiplica pela função V acima.

Se $a \in \mathcal{A}^\mu$ e $b \in \mathcal{A}^\nu$, então $[\text{op}(a), \text{op}(b)] = \text{op}(c)$, com $c \in \mathcal{A}^{\mu+\nu-1}$, ou seja, com o comutador ganhamos uma melhoria no símbolo em relação ao que teríamos com o mero produto $\text{op}(a)\text{op}(b)$, e essa atenuação do seu crescimento em ξ garante uma melhor regularidade para médias de observáveis quânticos que queiramos calcular, o que, por mais obscuro que pareça assim só falando, é relevante para calcularmos o limite clássico da mecânica quântica.

Por fim, uma das maiores tentações do que fazer com o cálculo simbólico é usá-lo para inverter os operadores! Se tivéssemos uma equação em u do tipo $\text{op}(a)u = f$, inicialmente poderíamos avaliar se, utilizando o símbolo $b = \frac{1}{a}$, caso esteja bem definido, não teríamos $\text{op}(b)\text{op}(a)u = u$, e daí $u = \text{op}(b)f$. A realidade, no entanto, é mais dura, pois $\frac{1}{a}$ nem sempre existe e, mesmo que sim caso $|a| > 0$ estritamente, ainda seria necessário avaliar seu crescimento (notadamente em ξ): quando a decresce rapidamente, isso implica que $\frac{1}{a}$ cresce demais, e vice-versa.

Há saídas, porém. Vejamos, a título de ilustração, o que se pode fazer para a equação $-\Delta u = \rho$, para calcular o potencial elétrico em um meio com densidade de carga ρ . Passando em Fourier:

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) = \hat{\rho}(\xi);$$

não podemos ter $\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)}{\xi^2}$ por uma questão óbvia de problemas perto de $\xi = 0$. No entanto, podemos resolver uma equação aproximada:

$$\xi^2 \hat{v}_F(\xi) = 1 - \chi(\xi),$$

em que $\chi \in C_0^\infty$ é uma função corte (*cut-off*, na literatura especializada), ou seja: $0 \leq \chi \leq 1$, e existe $\varepsilon > 0$ de modo a ser $\chi(\xi) = 1$ para $\|\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $\chi(\xi) = 0$ para $\|\xi\| \geq \varepsilon$.

Exercício 4.3. Desenhe o gráfico de χ na dimensão que quiser, e observe como essa função se anula longe de 0 e, perto da origem, mantém-se num patamar constante igual a 1.

Resolver a equação aproximada não é problemático:

$$\hat{v}_F(\xi) = \frac{1 - \chi(\xi)}{\xi^2},$$

pois, longe de 0, temos uma função $\hat{v}_F$ que decai rápido com grau -2 , e em toda uma vizinhança de $\xi = 0$ ela se anula, portanto fica controlada. Agora, basta repararmos que $\hat{v}(\xi) = \hat{v}_F(\xi)\hat{\rho}(\xi)$ resolve aproximadamente a equação para o potencial elétrico:

$$\xi^2 \hat{v}(\xi) = (1 - \chi(\xi))\hat{\rho}(\xi) = \hat{\rho}(\xi) + \text{resto com decaimento},$$

o que dá, finalmente,

$$u(x) = v_F * \rho + r * \rho,$$

em que $r \in C^\infty$, e $*$ indica o produto de convolução:

$$(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y) dy.$$

Exercício 4.4. Mostre que $\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$ e, inversamente, $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \hat{g}$.

É possível estimar numericamente esse resto r ? Será que tomando funções corte χ cada vez mais estreitas a aproximação fica melhor em algum sentido? Já que em algum momento tomaríamos a transformada inversa, que envolve uma integral em ξ , será que não poderíamos ter $\hat{u}_F = \frac{1}{\xi^2}$ para todo $\xi \neq 0$ e ignorar o que acontece nesse único ponto $\xi = 0$, que em nada interferiria no cálculo da integral da transformada?

Para responder a perguntas assim, precisamos começar a falar seriamente sobre a teoria das distribuições e soluções de EDP em sentido fraco, a fim de dar sentido a certas quantidades, mormente certas integrais, que divergem. Havendo interesse, esse será assunto, quem sabe, para a próxima Escola de Inverno Jayme Tiomno!