Análise qualitativa de EDOs

Escola de Inverno IF-USP

Entrega: 31 de julho

2019

Exercício 1

Determine, para o problema diferencial seguinte, as regiões de $\mathbb{R}^2$ em que as soluções existem e são únicas, e diga para quais valores iniciais elas serão crescentes, decrescentes ou constantes.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - y^2(t) \\ y(0) = -1 \end{cases} \tag{1}$$

Resolva o problema e encontre o intervalo maximal de definição das soluções para os possíveis valores iniciais.

Exercício 2

Resolva as equações seguintes em uma vizinhança de t_0 (tomando $t_0 = 0$ ou 1, como for mais conveniente):

1. $y'(t) + \ln(t)\, y(t) = 0$
2. $y'(t) = \frac{2}{t} y(t) + t^2 \sin(t)$
3. $\cos^2(t)\, y'(t) = y(t)$
4. $y'(t) - \frac{1}{t^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0$

Exercício 3

Mostre que toda solução da equação diferencial $y'(t) = F(y(t))$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, possui segunda derivada contínua em seu domínio.

Exercício 4

Considere a equação diferencial não linear:

$$y'(t) = e^{-y^2(t)}. \tag{2}$$

Mostre que todas as suas soluções estão globalmente definidas em $\mathbb{R}$, independentemente do valor inicial. Assim, seja y uma solução qualquer de (2):

1. Mostre que y é crescente, e que $\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$.
2. Há $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_0) = 0$? É único? Justifique.
3. Estude a variação de y' e seus limites quando $t \longrightarrow \pm\infty$.
4. Dê para y uma expansão de Taylor de ordem 3 em uma vizinhança do t_0 encontrado acima. (Se é que ele existe; vocês já sabem que, do jeito que são os meus exercícios, talvez este item seja uma cilada, então não adianta querer usá-lo como dica para o item 2...)

Exercício 5

Esteja dada a equação diferencial:

$$y'(t) = 1 + y^2(t) + t^2. \tag{3}$$

Mostre que toda solução y de (3) com valor inicial em t_0 não pode ser estendida para além do intervalo $(t_0 - \pi, t_0 + \pi)$.

Dica: lembre que $f \geqslant g$ em I acarreta $\int_I f \geqslant \int_I g$ para f e g integráveis em I.

Exercício 6

Considere a equação diferencial não linear:

$$y'(t) = \ln\left(\frac{1}{2} + y^2(t)\right). \tag{4}$$

Mostre que (4) possui soluções definidas globalmente em $\mathbb{R}$, qualquer que seja a condição inicial dada. Estude as soluções y em função de seus valores em t_0:

1. Determine o sentido de crescimento de y e seus limites para $\pm\infty$.
2. O mesmo para a derivada y'.
3. Dê para y uma expansão de Taylor de ordem 2 em uma vizinhança de t_0.

Bônus

Agora sim, o momento de grande descontração do curso!

Seja y a solução da EDO com valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y^2(t)}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

a qual sabemos existir em uma vizinhança de $t = 0$.

1. A equação em (5) é separável. Assim, encontre uma relação entre $y(t)$ e t na forma de uma integral.
2. A partir de (5), mostre que y é necessariamente inversível.

   (Uma condição suficiente para a inversibilidade é que y seja crescente ou decrescente.)
3. Ora, se y é inversível, pode-se escrever $t = f(y)$ para todo t no domínio de y. Encontre f, em seguida dê y em função de t por meio da inversa de f.

   Atenção: nem pensar em calcular primitivas para e^{-x^2}; a primitiva desse integrando não se deixa escrever em termos de funções elementares.
4. Calcule os limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

   Dica: Gauß já calculou para nós a parte mais difícil; procure por *integral gaussiana* na Wikipédia.
5. Mostre, por fim, que y diverge quando t tende a $\pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; conclua daí que y fica bem definida no intervalo $\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, mas não para além dele.
6. Resolva (5) numericamente e apresente a solução em um gráfico.