# Análise de EDPs hiperbólicas

Escola de Inverno IF-USP

Entrega: 31 de julho

2019

As *oscilações* são alguns dos fenômenos físicos de maior ubiquidade de que se tem notícia; nas provinhas de Física I deste ano, por exemplo, meus alunos descobriram que a molécula de hidrogênio $H_2$ apresenta, em baixas temperaturas, um comportamento bastante similar ao do sistema massa-mola. Um fenômeno associado, e igualmente ubíquo, é o das *ondas*, que podem ser descritas resumidamente como oscilações que se propagam no espaço. Para estudar com profundidade os fenômenos ondulatórios, foi introduzido o modelo da *corda vibrante* (figura abaixo).

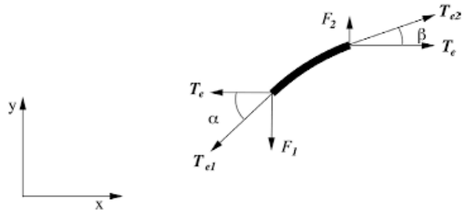


Figura 1: Modelo infinitesimal da corda vibrante.

Nesse modelo, a corda está submetida a uma tensão $T$ e possui uma densidade linear de massa $\rho$. Podemos dividi-la em infinitésimos, os "elementos de corda", e chamar de $u_x$ o deslocamento vertical (no eixo $Oy$) do "elemento de corda" na posição $x$ (do eixo $Ox$); suporemos que não há deslocamentos horizontais. Repare que, dessa maneira, para cada ponto da corda teremos uma posição em função do tempo, $u_x(t)$, que deverá satisfazer a uma EDO de segunda ordem.

Numa das provinhas dessa disciplina, os alunos precisaram entender que a componente vertical da força atuando sobre o "elemento de corda" depende da inclinação da corda em cada ponto, ou, melhor dizendo, depende da diferença de inclinação da corda à esquerda e à direita do ponto considerado. Como a inclinação é dada por $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, acabávamos encontrando que a força seria proporcional a $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$, o que resulta, aplicando a segunda lei de Newton (e lembrando que a aceleração do elemento em $x$ é dada por $\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$), em:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}(t) \;=\; T \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}(t).$$

Um pequeno comentário que soneguei aos alunos durante o curso do primeiro semestre: eu próprio não acredito muito nesses modelos de "elementos", e eles são meio furados mesmo, não devendo ser levados mais a sério que uma primeira aproximação para um fenômeno físico mais complexos. Na verdade, aqui estamos diante de um movimento típico de vaivém na construção da ciência, que é ir tateando por um resultado, chegar em algum lugar, e verificar sua pertinência *a posteriori*, umas vezes por meio de validação experimental, outras pela, digamos, fortuna crítica que ele receba da literatura científica, ainda que o modelo em si mostre-se cada vez menos satisfatório conforme amadureçam as ideias.

A corda vibrante, por mais desconfiança que tenhamos da Figura 1 e das suposições ali embutidas, fornece uma equação do tipo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \;=\; 0, \tag{1}$$

uma EDP linear homogênea, aqui em duas variáveis $t$ e $x$, hiperbólica, chamada *equação de onda* (às vezes equação de onda livre) com parâmetro $v$. Uma EDP cujas soluções, veremos, têm a forma de um perfil que se desloca em $x$ sem se alterar e, portanto, parecem adequadas a fenômenos de transporte sem dissipação de energia, informação, massa, etc. Uma EDP que, sem nenhuma relação com a Figura 1 e "elementos de corda" suspeitos, volta a aparecer no eletromagnetismo, ao combinarem-se as equações de Maxwell e ver que o campo eletromagnético satisfaz a (1), indicando que a luz é, na teoria clássica, uma onda.

## Exercício 1

Mostre que, dada qualquer função $f$ diferenciável, as funções:

$$\begin{aligned} u^{+}(x,t) &= f\left(x+vt\right), \\ u^{-}(x,t) &= f\left(x-vt\right), \end{aligned}$$

são soluções de (1). Tomando $v>0$, tente interpretá-las como um perfil da forma $f$ deslocando-se com velocidade $v$ para a esquerda (caso $u^{+}$) ou para a direita (caso $u^{-}$).

## Exercício 2

Mostre que a equação de ondas pode ser escrita na forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0,$$

e que as soluções $u^{+}$ e $u^{-}$ resolvem as EDPs de primeira ordem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u^{+}(x,t)=0 \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u^{-}(x,t)=0.$$

## Exercício 3

Originalmente, o enunciado era: *encontre expressões para as densidades lineares de energia cinética e de energia potencial da corda vibrante.* Era tudo mentira. Eu havia definido o que é energia de uma onda? Não obstante, mergulhados em um contexto de mecânica newtoniana de energia cinética mais potencial, tratando da EDP hiperbólica como se fossem pedacinhos de corda com massa subindo e descendo, foi possível para muitos encontrar expressões que, ao cabo, resultaram na seguinte fórmula para a energia total da corda:

$$E_t(u)=\int_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2+\left(v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2\right)dx; \tag{2}$$

o termo $\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)^2$, por exemplo, seria o componente cinético da energia, já que, de acordo com o modelo, isso seria a velocidade ao quadrado do "elemento de corda" na posição $x$. Mas, e se estivéssemos falando da onda do campo eletromagnético, esse raciocínio seria válido?

A princípio não, pois esse campo nem massa possui. Ocorre que energia é algo que não tem realidade ontológica (eu acho) e que definimos de forma justamente a representar alguma quantidade que permita calcular outras indiretamente, devido à existência de uma série de vínculos e implicações mútuas entre as quantidades presentes positivamente em um sistema. O Feynman nas palestras dele falou da energia como saldo bancário, que você movimenta, transforma em bens concretos, liquefaz vendendo-os e transforma em outros se quiser, ou guarda, mas que no fundo é só um número registrado, não uma quantidade verdadeira de ouro em peso entrando e saindo de uma caixa com o seu nome no banco.

Nós não precisamos dessa conversa mole do Feynman; nós apenas gostamos dela. Para nós, a energia é uma quantidade que serve para medir alguma coisa do nosso interesse no espaço de funções com que estamos trabalhando; essas medidas, já discutimos, são as normas em espaços vetoriais. Com efeito, para todo $t \in \mathbb{R}$, a $E_t$ definida em (2) induz uma seminorma em alguns espaços de funções (por exemplo daquelas que são diferenciáveis e têm derivadas integráveis) que podemos tomar como espaço ambiente das soluções $u$ de (1); ser seminorma, por acaso, significa que ter todas as propriedades de uma norma (ser positiva, homogênea, satisfazer à desigualdade triangular e dar 0 calculada para o vetor nulo), exceto que podemos ter $E_t(u) = 0$ para alguma função $u \neq 0$.

1. Mostre que, para todo $t$, $\sqrt{E_t}$ é uma seminorma no espaço das funções $C_0^1(\mathbb{R}^2)$ (funções contínuas com derivadas contínuas em $\mathbb{R}^2$ e suporte compacto).
2. Medite sobre o que mede a seminorma $\sqrt{E_t}$.

## Exercício 4

Mostre que são espaços vetoriais os seguintes conjuntos:

1. Soluções com condições de contorno de Cauchy:

$$V = \{u : [0, A] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ é solução de (1) e } u(0,t) = u(A,t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

2. Soluções com condições de contorno de Neumann:

$$V = \left\{u : [0, A] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ é solução de (1) e } \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(A,t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Mostre que a energia $E_t$ não depende de $t$ nesses espaços.

## Exercício 5

Dadas duas funções $f, g : [0, A] \longrightarrow \mathbb{R}$, mostre que, se a equação de onda com condições de contorno como as do exercício anterior possuir uma solução $u$ com condições iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, então ela é única.

**Dica:** suponha que duas soluções $u$ e $v$ satisfaçam às condições iniciais dadas. Estude a energia da solução $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$.

## Exercício 6

Acima, vimos que funções do tipo $u^+$ e $u^-$ são sempre soluções da equação de onda, a qual, por ser linear, admite como soluções também combinações lineares de $u^+$ e $u^-$. Mostre que a afirmação inversa é verdadeira, ou seja, que *toda* solução da equação de onda obedecendo a condições de contorno e com dados iniciais regulares é a sobreposição de uma solução do tipo $u^+$ com outra do tipo $u^-$.

**Dica:** basta mostrar que é possível achar coeficientes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e perfis $u_1, u_2$ tais que, com a combinação linear $\alpha u_1(x + vt) + \beta u_2(x - vt)$, consigam-se ajustar quaisquer condições iniciais.

## Exercício 7

Já que uma hipérbole em sua forma reduzida mais geral é dada por

$$ax^2 - by^2 = K,$$

com $a, b > 0$ e $K \in \mathbb{R}$ constantes, precisamos estudar a seguinte EDP, para conhecermos o comportamento das soluções de EDPs hiperbólicas homogêneas em geral:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(x,t) = K^2 u(x,t). \tag{3}$$

Defina em um espaço apropriado de funções a seminorma $\sqrt{E_t}$ dada por:

$$E_t(u) = \int_{\mathbb{R}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right)^2 + \left( v\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right)^2 + (vKu(x,t))^2 \right) dx,$$

e mostre que as soluções de (3) no domínio $[0, A] \times \mathbb{R}$, com condições de fronteira de Cauchy ou de Neumann e satisfazendo a dados iniciais $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, serão únicas, se existirem.

*Observação* 1. Atente ao fato que, para cada $t$, a $\sqrt{E_t}$ definida para os espaços de soluções da equação (3) é não apenas uma seminorma, mas de fato uma norma inteira. Lembra-se do primeiro módulo deste curso, *Espaços vetoriais completos*, quando apenas começávamos a falar de normas em espaços vetoriais, que eu citei uma que tinha uma cara muito horrível, chamada de Sobolev? Pois é, ela (quase) está diante dos seus olhos (em uma roupagem mais atraente, é verdade), e você já pode vislumbrar parte de sua grande utilidade.

## Exercício 8

No modelo da Figura 1, implicitamente supusemos que a corda oscila no vácuo. No entanto, para uma análise mais realística é importante considerar a corda vibrando em um meio material, como por exemplo na própria atmosfera. Ora, um corpo que se move em um meio viscoso com velocidade $\vec{v}$ é submetido a uma força de atrito viscoso dada por $\vec{F} \propto -\vec{v}$. Foi trabalho da turma de Física I mostrar que, para uma corda vibrando em meio viscoso, a função $u(x, t)$ deverá satisfazer a uma equação da forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \;=\; \mu\frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \tag{4}$$

chamada de *equação de onda amortecida*, em que $\mu > 0$ é uma constante. Naquela ocasião, os estudantes foram solicitados a dizer se as soluções dessa EDP, satisfeitas condições apropriadas, seriam únicas.

1. Mostre que a função $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)e^{\frac{\mu v^2}{2}t}$ é solução da EDP hiperbólica reduzida (3), mas com $K = iC$, $C \in \mathbb{R}$.
2. Enuncie um resultado de unicidade para soluções de (4) que vierem a existir.
3. Mostre que qualquer solução $u$ da (4) necessariamente tem decaimento exponencial, ou seja, $\int_{\mathbb{R}}(u(x,t))^2 dx \;\lesssim\; e^{-\mu v^2 t}$.

## Exercício 9

Já consideramos o caso mais famoso, da equação de onda livre (1), e o caso homogêneo mais geral (3), que em particular dá conta de fenômenos de amortecimento. Falta, por completeza, considerar a *equação de onda com fonte* externa, ou inomogênea:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(x,t) - K^2 u(x,t) \;=\; F(x,t), \tag{5}$$

em que $F : [0, A] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer (em geral, defeitos de regularidade de $F$ implicarão defeitos em $u$, que será, no máximo, tão contínua e diferenciável quanto $F$). Mostre que soluções de (5) satisfazendo mesmas condições iniciais e de fronteira, se existirem, serão únicas.