Teoremas de ponto fixo

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 O teorema do ponto fixo de Banach

Seja V um espaço normado, e seja $B : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se existir uma constante $K > 0$ tal que $\|Bu\| \leqslant K\|u\|$ para todo $u \in V$, diz-se que B é limitado, e prova-se que um operador linear é limitado e se somente se é contínuo.

Exercício 1.1. No caso de dimensão finita, em que B é de fato uma matriz, o que esse K tem a ver com a norma da matriz B, $\|B\|_M$?

Vamos usar esses fatos no curso? Não. Mas, para uma pessoa acostumada a trabalhar com operadores em espaços vetoriais (matrizes, se quiser), é quase que um reflexo mexer com a expressão $\|Bu\| \leqslant K\|u\|$ e tentar tirar alguma coisa dela. Ora, é fácil ver que $\|B^2u\| \leqslant K^2\|u\|$ (aqui, $B^2 = B \circ B$, assim, $B^2u = B(Bu)$), e, por indução, que $\|B^nu\| \leqslant K^n\|u\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tivermos $K < 1$ estritamente, fica claro que a sequência $v_n = B^nu$ converge para 0 na norma $\| \, \|$, qualquer que seja $u \in V$; como o operador é linear, $B0 = 0$, ou seja, B^nu converge para uma solução da equação de ponto fixo $Bv = v$. Esses fatos certamente podem ser generalizados, pois repare que nem sequer usamos a linearidade de B nesse raciocínio.

Com efeito, podemos ir além e considerar uma função $\Phi : V \longrightarrow V$ que nem seja necessariamente linear, mas que seja contrativa, ou seja, tal que $\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leqslant K\|u - v\|$ com $0 < K < 1$, para quaisquer $u, v \in V$. Da mesma maneira:

$$\|\Phi^{n+1}(u) - \Phi^{n+1}(v)\| \leqslant K\|\Phi^n(u) - \Phi^n(v)\| \leqslant \ldots \leqslant K^n\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leqslant K^{n+1}\|u - v\|,$$

portanto a sequência $\Phi^n(u) - \Phi^n(v)$ converge em norma a 0, quaisquer que sejam u e v (ainda que, *a priori*, separadamente $\Phi^n(u)$ e $\Phi^n(v)$ possam apresentar vários comportamentos, talvez nem serem convergentes). Em particular, isso vale se pegarmos $v = \Phi^N(u)$ (fiz um $N \in \mathbb{N}$), do que a sequência $s_n = \Phi^n(u)$ é de Cauchy, pois, se tomarmos $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes (sem perda de generalidade, suponhamos $m = n + M$), o que acabamos de ver dá:

$$\|s_n - s_m\| = \left\|\Phi^n(u) - \Phi^n\left(\Phi^M(u)\right)\right\| = \|\Phi^n(u) - \Phi^n(v)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se tivermos a felicidade de V ser um espaço de Banach, ou seja, um espaço vetorial completo, em que toda sequência de Cauchy é convergente, estão fica assegurado que (s_n) possui um limite $s \in V$. Sabe o que é interessante sobre esse limite?

Exercício 1.2. Mostre que, se $\Phi : V \longrightarrow V$ é contrativa, então Φ é contínua.

Exercício 1.3. Mostre que, se $\Phi : V \longrightarrow V$ é contínua e a sequência (s_n) converge a s na norma de V, então a sequência $(\Phi(s_n))$ é convergente e $\lim_n \Phi(s_n) = \Phi(s)$.

Exercício 1.4. Refaça o exercício anterior usando diretamente a contratividade de Φ.

Exercício 1.5. Se (s_n) é uma sequência convergente a s em V, então a sequência $\tilde{s}_n = s_{n+1}$ também é convergente e $\lim_n \tilde{s}_n = s$.

O interessante sobre o limite s da sequência $s_n = \Phi^n(u)$, com Φ contrativa, é, em primeiro lugar, que qualquer sequência $\Phi^n(v)$, com $v \in V$ arbitrário, converge para ele; em segundo lugar, já que isso é fato para qualquer v, tomemos $v = \Phi(u)$, e teremos:

$$\Phi(s) \;=\; \Phi\left(\lim_n \Phi^n(u)\right) \;=\; \lim_n \Phi^{n+1}(u) \;=\; \lim_n \Phi^n(v) \;=\; s,$$

em que usamos, nas duas primeiras igualdades, o resultado dos exercícios (1.3) e (1.5) respectivamente, e na terceira a associatividade da composição d funções, $\Phi^{n+1}(u) = \Phi^n\left(\Phi(u)\right)$.

Em outras palavras, toda equação de ponto fixo $\Phi(u) = u$ em um espaço de Banach possui uma solução dada por $u = \lim_n \Phi(v)$, com $v \in V$ qualquer. Esse resultado é tão bom que nos fornece até uma taxa de convergência, para quem gosta de cálculo numérico: dado $v \in V$, a sequência $\Phi^n(v)$ aproxima u com um erro $\varepsilon(n)$ majorado por:

$$\varepsilon(n) \;=\; \|\Phi^n(v) - u\| \;=\; \|\Phi^n(v) - \Phi^n(u)\| \;\leqslant\; K^n\|u - v\|.$$

Se tivermos a sorte de escolher v próximo de u, a aproximação é melhor, mas não fica mais rápida (a menos que cravemos $v = u$ logo de primeira, ou que tenhamos $u = \Phi^m(v)$ para algum m).

Exercício 1.6. Mostre que, se Φ for uma contração em um espaço de Banach, então a equação de ponto fixo $\Phi(u) = u$ possui uma única solução.

Com a unicidade demonstrada, o tratamento do ponto fixo de Banach fica completo: ele existe, é único, sabemos calculá-lo, e sabemos o quanto erramos se fizermos um cálculo aproximativo.

Exercício 1.7. Escreva formalmente um enunciado para o teorema do ponto fixo de Banach.

Em aula, vamos aplicá-lo para demonstrar o teorema de Picard-Lindelöf, que versa sobre a existência e unicidade de soluções clássicas para EDOs, dadas certas condições sobre a função F que caracteriza a EDO.