Existência e unicidade de soluções de EDOs

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 Equação de Volterra

Uma EDO de primeira ordem satisfatoriamente geral (para quando procuramos por soluções no sentido clássico) pode ser escrita na forma

$$u'(x) = F\left(x, u(x)\right), \tag{1}$$

em que $F : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$, ou algo similar. Por "solução no sentido clássico" queremos dizer: uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}$ aberto) derivável, cuja derivada seja dada, a cada $x \in \Omega$, por $F(x, u(x))$ (como vimos no começo do curso, soluções de equações diferenciais podem ser compreendidas de maneira bem mais abrangente). Caso F seja constante na segunda variável, *i.e.*, caso $F(x, y) = f(x)$ para alguma $f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R}$, e caso essa f não seja horrorosa o suficiente para não ser integrável, fica fácil resolver a EDO tomando primitivas em ambos os lados da (1). Obtemos:

$$u(x) \bmod \mathbb{R} \; = \int f(x)dx;$$

a expressão $\bmod \mathbb{R}$ (módulo $\mathbb{R}$) significa que estamos encontrando u a menos de uma constante aditiva, já que a primitiva de uma função também é definida a menos de uma constante aditiva. Assim, a igualdade acima define antes uma família de soluções que uma função u unívoca. Se tivermos um problema com valor inicial ($u(x_0) = u_0$, $x_0 \in \Omega$), obtém-se univocamente, com auxílio da integral definida:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Supondo que exista uma u que satisfaça a equação (1), podemos repetir o mesmo procedimento para F mais geral, contando que seja integrável em torno de $(x_0, u(x_0))$, obtendo:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, u(t)). \tag{2}$$

Em resumo, supondo que a EDO (1) possui solução, concluímos que a solução satisfaz a (2). Inversamente, é fácil ver que, se uma função u satisfaz à equação (2) com F não sendo patológica em uma vizinhança de $(x_0, u(x_0))$, então ela é derivável e satisfaz a (1) (por exemplo, se a função $t \mapsto F(t, u(t))$ for contínua, então $x \mapsto \int_{x_0}^{x} F(t, u(t))dt$ é derivável e sua derivada em x é dada por $F(x, u(x))$). Em conclusão, uma EDO com valor inicial é equivalente a uma equação integral da forma (2), chamada de equação de Volterra.

A expressão (2), no entanto, não fornece explicitamente a função u em todos os casos, apenas quando $F(x, y) = f(x)$. Mesmo assim, há um motivo para reescrever uma EDO em sua forma integral.

Seja $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Consideremos o espaço

$$\mathcal{B} = \{\, u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{tal que } t \mapsto F(t, u(t))\, \text{seja integrável em uma vizinhança de } (x_0, u_0)\,\};$$

consideremos também nesse espaço a função $\mathcal{F}$ dada, para cada $x \in \Omega$, por

$$\left(\mathcal{F}(u)\right)(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, u(t))dt.$$

Assim, a equação de Volterra lê-se como uma equação de ponto fixo $\mathcal{F}(u) = u$ no espaço $\mathcal{B}$. Atenção, não se trata de uma equação de ponto fixo em $\mathbb{R}^n$, mas uma em que a variável é um elemento de $\mathcal{B}$, ou seja, a incógnita é, ela mesma, uma função, que doravante enxergaremos como um ponto de um espaço vetorial.

A grande vantagem, portanto, da equação de Volterra, é haver muitos e variados resultados conhecidos sobre a existência, a unicidade, mesmo algoritmos de cálculo de raízes para uma equação de ponto fixo.

2 Existência e unicidade de soluções de EDOs

Voltemos à EDO da forma

$$u'(x) = F(x, u(x)),$$

mais precisamente, ao problema com valor inicial $u(x_0) = u_0$, e reescrevamo-lo na forma integral de Volterra:

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, u(t))dt,$$

que é uma equação de ponto fixo $\mathcal{F}(u) = u$, para $u \in \mathcal{B}$ um elemento de um espaço de funções e

$$\left(\mathcal{F}(u)\right)(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, u(t))dt. \tag{3}$$

Se conseguirmos encaixar essa equação de ponto fixo em algum teorema de ponto fixo que conhecemos, está resolvida a questão da existência e, possivelmente, da unicidade das soluções clássicas de uma EDO.

Para que a equação faça sentido, F não pode ser qualquer negócio, em particular, por exemplo, é necessário que $t \mapsto F(t, u(t))$ seja integrável em uma vizinhança de x_0, então as tarefas que temos que cumprir, e concomitantemente, são:

1. encontrar características de F que deem sentido à equação e garantam propriedades interessantes para $\mathcal{F}$;
2. encontrar um espaço de funções $\mathcal{B}$ adequado para a aplicação de algum teorema de ponto fixo usando a $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(u) = u$ para $u \in \mathcal{B}$;
3. aplicar o teorema de ponto fixo conveniente.

O resultado mais conhecido, nesses termos, é o teorema de Picard-Lindelöf, obtido por meio do teorema do ponto fixo de Banach, para contrações em espaços completos. Ora, se formos usar esse teorema, precisamos garantir que $\mathcal{B}$ seja um espaço vetorial completo e que $\mathcal{F}$ seja uma função de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$ contrativa. De recompensa, esperamos obter uma solução única (pelo menos, única em $\mathcal{B}$) para a EDO.

Para começar, analisemos a função $F : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$ que caracteriza a EDO. Pela milésima vez, ela precisa ser integrável em uma vizinhança do ponto (x_0, u_0), o que pode ser obtido supondo-a contínua em ambas as variáveis perto desse ponto. Além disso, para o espaço de funções, já vimos em exercícios que alguns espaços de funções contínuas sobre um intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$ são completos em relação à norma $\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$. Definamos:

$$C(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ é contínua e } \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty \right\}.$$

Exercício 2.1. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}$, verifique que $C(\Omega)$ é um espaço de Banach com relação à norma $\|\ \|_\infty$ definida acima.

Isso indica que $C(\Omega)$ é um bom candidato a $\mathcal{B}$, desde que $x_0 \in \Omega$, que F seja bicontínua numa região contendo $\Omega \times I$, em que $I \subset \mathbb{R}$ contém u_0, e que esperemos resolver a EDO no máximo para $x \in \Omega$ e, correspondentemente, para $u(x) \in I$. Para não corrermos o risco de ter uma u cuja imagem de Ω extrapole I e possa causar problemas numa região em que F talvez não seja bem comportada, poremos:

$$\mathcal{B} = \{u \in C(\Omega),\ u(\Omega) \subset I\}.$$

Exercício 2.2. Mostre toda sequência de Cauchy em $\mathcal{B}$ converge no próprio conjunto com a norma do sup. Você vai falhar. (Onde?) Faça alguma suposição sobre I para que dê certo. Dica: prove separadamente que um subconjunto fechado de um espaço de Banach também é completo.

Exercício 2.3. Mostre que, tomando apenas $x \in \Omega$ em (3), é possível escolher um I tal que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Isso garantirá que $\mathcal{F} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ fica bem definida, $\mathcal{F}$ função de $\mathcal{B}$ no próprio $\mathcal{B}$, que é o que precisamos para aplicar o teorema do ponto fixo de Banach.

Por fim, basta verificar se $\mathcal{F}$ é uma contração na norma de $\mathcal{B}$, que, conforme escolhemos, será a do supremo. Dadas $u, v \in C(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_\infty &= \left\| \int_{x_0}^{x} [F(t,u(t)) - F(t,v(t))]\, dt \right\|_\infty \\
&= \sup_{x\in\Omega} \left| \int_{x_0}^{x} [F(t,u(t)) - F(t,v(t))]\, dt \right| \\
&\leqslant \sup_{x\in\Omega} \left[|x - x_0| \sup_{t\in[x,x_0]\cup[x_0,x]} |F(t,u(t)) - F(t,v(t))| \right] \\
&\leqslant \mathfrak{m}(\Omega) \sup_{t\in\Omega} |F(t,u(t)) - F(t,v(t))|, \qquad (4)
\end{aligned}$$

em que $\mathfrak{m}(\Omega)$ é o comprimento do intervalo Ω. Disso já vemos que é bom não tomar Ω muito grande; para começar, podemos supor que Ω é um intervalo finito e pesquisar por soluções que satisfaçam à EDO nesse intervalo. Se elas poderão ser estendidas para toda a reta, já é outra história (lembre-se dos exemplos que vimos, os quais mostram às vezes ser, e às vezes não ser possível essa extensão).

Até o momento, porém, ainda não ficou super claro que $\mathcal{F}$ seja uma contração. Que fazer? Hipóteses suplementares, por óbvio, que nos ajudem! A outra alternativa seria quebrar a cabeça mais um pouco e ver se conseguimos acabar de mostrar que $\mathcal{F}$ é contrativa com o que já supusemos. Optaremos pelas hipóteses suplementares. Se supusermos que F possui derivada parcial em y no intervalo I, calculamos, com auxílio de um desenvolvimento de Taylor de ordem 0 com resto integral (Cálculo I!):

$$F(t,u(t)) = F(t,v(t)) + \int_0^1 \partial_y F(t, v(t) + s[u(t) - v(t)])(u(t) - v(t))ds,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\Omega} |F(t,u(t)) - F(t,v(t))| &\leqslant \sup_{t\in\Omega} \left| \int_0^1 \partial_y F(t, v(t) + s[u(t) - v(t)])(u(t) - v(t))ds \right| \\
&\leqslant \sup_{(x,y)\in\Omega\times I} |\partial_y F(x,y)|\, \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Juntando esse resultado com a estimativa (4), segue que:

$$\|\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(v)\|_\infty \;\leqslant\; \mathfrak{m}(\Omega) \sup_{(x,y)\in\Omega\times I} |\partial_y F(x,y)| \|u-v\|_\infty,$$

portanto, se pudermos escolher Ω suficientemente pequeno de modo a ter

$$\mathfrak{m}(\Omega) \sup_{(x,y)\in\Omega\times I} |\partial_y F(x,y)| \;<\; 1,$$

$\mathcal{F}$ será contrativa. Isso é possível, por exemplo, se tivermos $\partial_y F$ contínua em um aberto contendo estritamente o retângulo $\Omega \times I$, pois assim $\partial_y F$ será contínua no fecho do retângulo e, como sabemos (ou deveríamos saber, de Cálculo I), uma função contínua em um compacto é limitada, do que $\sup_{(x,y)\in\Omega\times I} |\partial_y F(x,y)| < \infty$.

Assim, pelo teorema do ponto fixo de Banach, a EDO terá uma única solução na região Ω satisfazendo o dado inicial $u(x_0) = u_0$. De quebra, já saberemos controlar essa solução, ou seja, sabemos que perto do ponto inicial, para $x \in \Omega$, o valor da função ficará perto do valor inicial $u(x_0) = u_0$, teremos $u(x) \in I$ (esse controle pode ser refinado, como veremos no curso, mas nem sempre estendido para x longe de x_0; comentaremos sobre isso quando falarmos de estabilidade da solução da EDO).

Alguns comentários: não foi por preguiça apenas que optamos pelas hipóteses suplementares ao invés de quebrar a cabeça mais um pouco, acima, quando precisávamos verificar que $\mathcal{F}$ era contrativa. Ao contrário da redação de uma demonstração matemática, que é dedutiva (parte-se de um conjunto de hipóteses amarradinhas e, por deduções lógicas, chega-se a um resultado), a pesquisa em matemática é, na realidade, bastante indutiva: procede-se mais ou menos como fizemos acima, juntando pedaços de coisas que sabemos (transformar EDO em Volterra, usar ponto fixo, etc.) e fazendo sob medida as suposições que nos ajudam a chegar ao que queremos. Várias vezes supusemos continuidade para obter coisas distintas, pedimos F contínua para que fosse integrável, $\partial_y F$ contínua para que fosse limitada, fizemos estimativas para obter as desigualdades que não foram ótimas (por exemplo, na (4), não precisávamos ter todo o comprimento $\mathfrak{m}(\Omega)$, apenas uma majoração para as possíveis distâncias $x - x_0$; se x_0 calhasse de estar no meio do intervalo Ω, poderia ter aparecido um fator $\frac{1}{2}$ naquela desigualdade).

Esse momento da pesquisa é um. Outro é testar as hipóteses e ver se são mesmo essenciais, e o que muda nos resultados mudando-as; supondo apenas continuidade de F, obtemos existência, mas não unicidade, há exemplos. É importante, na pesquisa em matemática, contar sempre com uma grande biblioteca de exemplos e contraexemplos justamente para não insistir em demonstrar um fato que, à luz de um caso conhecido, já se sabe que é falso. Eu, por exemplo, gosto muito dos potenciais $V(x) = |x|$ e $V(x) = -|x|$, que, nas equações de Newton, ilustram vários problemas e defeitos que as trajetórias das partículas submetidas a eles (que nada mais são que soluções de EDOs) exibem, dada a presença de um ponto em que a F, no caso, não teria derivada parcial em y contínua.

O acabamento, no entanto, de uma investigação matemática está em quando se passa a conclusão e o raciocínio a limpo, pondo tudo em forma dedutiva, como demonstração de um enunciado. Aqui, para nós, teríamos o seguinte enunciado:

Teorema 1 (Picard-Lindelöf)**.** *Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um aberto do plano Oxy, e $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que sua derivada parcial $\partial_y F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ também seja contínua. Então, para cada ponto $(x_0, u_0) \in A$, existe um intervalo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$, com $x_0 \in \Omega$, e uma única função derivável $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in \Omega$, tem-se $(x, u(x)) \in A$ e:*

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)), \\ u(x_0) = u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Em outras palavras, satisfeitas as hipóteses sobre F, para cada dado $(x_0, u_0) \in A$ o problema de valor inicial (5) possuirá uma única solução local.

Demonstração. Exercício. ■

Se olharmos com atenção a demonstração do teorema, sai dela mesma uma estimativa para o tamanho da região em que a solução da EDO existe com certeza. Tomemos o maior retângulo fechado $R \subset \mathbb{R}^2$ centrado em (x_0, u_0) que esteja contido em Ω; digamos que seja $R = \left[x_0 - \frac{b}{2}, x_0 + \frac{b}{2}\right] \times \left[u_0 - \frac{h}{2}, u_0 + \frac{h}{2}\right]$ (tomamos b como base h como altura); denotemos $M = \max_{(x,y)\in R} |F(x,y)|$ (lembre-se: função contínua em domínio compacto sempre atinge seu máximo) e $N = \max_{(x,y)\in R} |\partial_y F(x,y)|$. Então a solução u existe e é única em um intervalo $\Omega = (x_0 - r, x_0 + r)$, em que

$$r = \min\left\{ b\,,\ \frac{h}{M}\,,\ \frac{1}{2N} \right\}$$

é o raio de existência (e unicidade) da solução. De que ele depende?

Dos valores absolutos de F e $\partial_y F$ na vizinhança do dado inicial (x_0, u_0), e da distância desse ponto à fronteira da região em que F (e sua derivada parcial em y) é contínua. Se o valor de F ou $\partial_y F$ ficar muito grande, podemos ter o problema de u divergir para algum x finito, $u(x) \longrightarrow \pm\infty$ para $x \longrightarrow \tilde{x}$, para algum $\tilde{x} \in \mathbb{R}$; se chegarmos perto da fronteira de A, podemos ter problema de existência e unicidade mesmo com u mantendo-se limitada. Mas também pode acontecer que a solução exista e seja única lindamente bem para além do intervalo Ω garantido pela prova do teorema.

O raciocínio inverso prova-se (depois de algum trabalho) também verdadeiro: se F e $\partial_y F$ forem gentis sempre, e mantiverem-se limitadas, então a solução pode ser estendida globalmente. Veremos essas coisas com mais precisão em aula.