Espaços vetoriais completos

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 Espaços vetoriais normados

Um espaço vetorial é um conjunto (*a priori*, qualquer conjunto) V munido das operações de soma $+ : V \times V \longrightarrow V$ e de multiplicação por elementos de um dado corpo (aqui, $\mathbb{R}$, mas quase tudo funciona com $\mathbb{C}$ ou outro corpo qualquer que possua uma função valor absoluto), $\cdot : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$, que satisfaçam às propriedades de sempre. Para a soma vetorial:

- comutatividade: $u + v = v + u$;
- associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$;
- existência do vetor nulo: existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ para todo u;
- existência do inverso aditivo: para todo u, existe $\tilde{u} \in V$ tal que $u + \tilde{u} = 0$.

Para a multiplicação por escalar:

- associatividade: $\lambda \cdot (\kappa \cdot u) = (\lambda\kappa) \cdot u$ (as letras gregas são os escalares);
- identidade: $1 \cdot u = u$ para todo u.

Misturando-as:

- distributiva do escalar: $(\lambda + \kappa) \cdot u = \lambda \cdot u + \kappa \cdot u$;
- distributiva do vetor: $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Exercício 1.1. Verifique as seguintes propriedades:

1. (unicidade do vetor nulo) se $u + v = u$, então $v = 0$;
2. (unicidade do inverso aditivo) se $u + v = 0$ e $u + w = 0$, então $v = w$;
3. $0u = 0$ (o símbolo 0 representa o quê de cada lado da identidade?);
4. dado $u \in V$ e seu inverso aditivo $\tilde{u}$, $\tilde{u} = -1u$ (daí notarmos $\tilde{u} = -u$).

Exercício 1.2. Dado um conjunto X, mostre que a coleção das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é um conjunto. Mostre que esse conjunto, munido das operações de soma pontual $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e multiplicação pontual por escalar complexo $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Exercício 1.3. Mostre que $C(\mathbb{R}^n)$ (funções contínuas sobre $\mathbb{R}^n$, com valores escalares) é um espaço vetorial com as operações pontuais de soma e multiplicação por escalar. Faça o mesmo para $C^k(\Omega)$ (funções sobre Ω com derivadas contínuas até ordem k), em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, e $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$.

Um espaço vetorial pode possuir uma noção de tamanho para seus vetores, como é o caso dos espaços euclidianos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, e as respectivas distâncias euclidianas entre dois pontos. Por exemplo, dados pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ em $\mathbb{R}^3$, o vetor

$$u = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

(que é a setinha apontando de A para B) tem tamanho

$$\|u\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}, \tag{1}$$

que nada mais é que a distância euclidiana entre os pontos A e B. “Distância euclidiana” significa o tamanho do segmento de reta ligando esses pontos, mas essa não é a única noção de tamanho interessante para esses espaços.

O mapa de uma cidade, por exemplo, pode ser pensado como um plano cartesiano, isto é, $\mathbb{R}^2$, e uma noção de tamanho nesse plano que informe o comprimento dos caminhos que efetivamente se tem que percorrer para chegar do ponto A ao ponto B pode vir a ser mais útil que a distância euclidiana usual (já que nem sempre podemos andar em linha reta na cidade, pois não podemos passar pelo meio dos imóveis, pular muros, atravessar as ruas em qualquer lugar, etc.). Em uma cidade com o arruamento perfeitamente quadriculado, a distância que se percorre entre A e B é sempre maior que $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$, portanto a noção de tamanho do vetor $u = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ dada por

$$\|u\|_1 = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

pode ser mais informativa que a $\|\ \|$ da equação (1).

Há, no entanto, algumas características que uma noção de tamanho de vetor deve respeitar para ser realmente útil, não apenas do ponto de vista prático, para que tenhamos uma intuição sobre ela, mas também do ponto de vista teórico, ou seja, características que permitam obter resultados matemáticos de relevo. Em resumo, uma boa noção de tamanho é uma função positiva $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que:

- $\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$;
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;
- (desigualdade triangular) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Uma função com essas propriedades recebe o nome de norma sobre o espaço V, e diz-se, nesse caso, que V é um espaço normado (a bem da verdade, para ser espaço vetorial normado, é necessário mostrar que as operações de soma e multiplicação por escalar ficam contínuas em relação a essa norma, mas nos caso que vamos estudar elas ficam; esse requerimento é tão esquecível que eu mesmo esqueci dele, quando escrevi o texto pela primeira vez).

Observação 1.1. A título de exemplo da importância desses requisitos, repare que a desigualdade triangular corresponde, no caso euclidiano, à noção intuitiva de que o menor caminho entre os pontos A e B é o segmento de reta entre eles, e se percorrermos o caminho de A a B parando em um terceiro ponto C, andaremos tanto (no caso de C estar na reta entre A e B) ou mais (caso C esteja fora da reta, daí o nome *desigualdade triangular*): chame o caminho reto de A a C de u, de C a B de v; a reta de A a B é a soma vetorial $u + v$, agora interprete a desigualdade $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Do ponto de vista teorético, é muito frequente querermos aproximar pontos do espaço vetorial por sequências que os aproximam no sentido na norma ($\|u - u_n\| \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$), pois não raro sabemos calcular esses pontos apenas por meio de um processo de aproximações sucessivas (pense nos métodos numéricos para calcular raízes de equações transcendentais; faremos algo bem parecido com soluções de equações diferenciais). A desigualdade triangular permite obter informações sobre os pontos a partir das sequências que os aproximam. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\|u - v\| &= \|(u - u_n) + (u_n - v_n) + (v_n - v)\| \\
&\leqslant \|u - u_n\| + \|v - v_n\| + \|u_n - v_n\| \\
&\approx \|u_n - v_n\|,
\end{aligned}$$

ou seja, podemos controlar a distância entre u e v a partir do comportamento das sequências (u_n) e (v_n) que os aproximam. Em particular, a propriedade acima diz que o limite de uma sequência é único (mostre!), o que é um resultado de extrema importância para quase tudo o que se estuda de análise durante a vida, a não ser que você vá estudar espaços muito doentios ao longo da sua carreira.

Exercício 1.4. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mostre que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ é uma norma para o espaço vetorial $C_0^k(\Omega)$. Faça o mesmo para $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$.

Exercício 1.5. Mostre que $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)|dx$ não é uma norma para o espaço vetorial das funções de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ com suporte compacto (a diferença dessas para $C_0(\Omega)$, é que elas não precisam ser contínuas).

Agora que você já sabe o que é uma norma, seja feliz criando as suas próprias noções de distância e, sobretudo, nunca reclame das normas criadas pelos outros, pois se uma norma foi definida, ela deve ter alguma utilidade para alguém, por mais bizarra que pareça. Talvez ao longo do curso tenhamos a oportunidade de falar de espaços de Sobolev, e as normas que vão aparecer ali merecem toda a nossa simpatia, apesar das aparências: dada uma função f no espaço de Sobolev $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, sua norma (nesse espaço) é dada por:

$$\|f\|_\alpha = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (1+\xi^2)^\alpha \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi},$$

em que $\hat{f}$ é a transformada de Fourier de f. Essa coisa, que à primeira vista nem parece ser uma norma, é usada para medir a regularidade de f, *grosso modo*, quantas vezes ela pode ser derivada sem começar a apresentar problemas de divergência.

2 Espaços normados completos

Como vimos na Observação 1.1, a aproximação de pontos de um espaço por sequências que convergem no sentido na norma (u_n converge a u se $\|u - u_n\| \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$) é importante sob vários pontos de vista, desde por questões da estrutura topológica do espaço, até problema mais comezinhos, como calcular numericamente soluções de equações.

Só que há armadilhas! Buracos, melhor dizendo. Exemplo canônico: queremos calcular o número que resolve $x^2 = 2$. Isso é feito por aproximações sucessivas de números racionais cujos quadrados ficam sucessivamente mais perto de 2, *e.g.* $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$, etc. Ocorre que essa sequência não possui um limite dentro do conjunto dos números racionais, então estamos diante de uma sequência em $\mathbb{Q}$ que não converge (não no espaço $\mathbb{Q}$, que é um espaço vetorial sobre o corpo dos racionais). A princípio, não há sentido em dizer algo como "a solução de $x^2 = 2$ é dada por $x = \lim_{n\to\infty} x_n$", já que essa sequência sabidamente não converge, e portanto esse limite não existe.

A solução do problema passa por construir um novo espaço, maior, que contenha $\mathbb{Q}$, no qual essa sequência possua um limite. Estamos falando de $\mathbb{R}$ (um espaço vetorial sobre o corpo dos reais), em que as sucessivas aproximações do caso acima (cada x_n, sendo racional, é real) levam para um número real (que, claro, é $\sqrt{2}$, um real, ainda que não seja um racional).

Será que sempre é possível construir um espaço maior para que as sucessivas aproximações de uma equação convirjam nesse espaço? Essa é uma pergunta importante, e leva ao conceito de completamento de espaços vetoriais normados. Não falaremos disso neste curso, apenas das noções básicas.

Indo direto ao assunto, dado um espaço vetorial V com uma norma $\| \|$, uma sequência (u_n) é chamada de sequência de Cauchy se, dados $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes, tivermos $\|u_n - u_m\|$ pequeno. Formalmente: para qualquer erro $\varepsilon > 0$, existe um patamar $N \in \mathbb{N}$ tal que, se olharmos a sequência para além desse patamar, *i.e.*, para $n, m > N$, temos que os elementos da sequência diferem por um erro menor que ε, $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$.

Exercício 2.1. Mostre que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy. (Veja aí, mais uma vez, a importância da desigualdade triangular para a norma.)

Exercício 2.2. Dê exemplo de um espaço vetorial normado em que exista uma sequência de Cauchy que não seja convergente no sentido da norma.

Como você acabou de ver, uma sequência de Cauchy nem sempre é convergente. O completamento de um espaço V em que algumas sequências de Cauchy não convergem é um procedimento que permite construir um espaço vetorial maior, contendo V, em que seja possível atribuir a todas as sequências de Cauchy um limite. Nesse espaço maior, evidentemente, todas as sequências de Cauchy serão convergentes. Um espaço vetorial normado em que todas as sequências de Cauchy são convergente é chamado de espaço completo. A vantagem de trabalhar nesses espaços é que se pode concluir que uma sequência converge sem conhecer o seu limite, apenas analisando seu comportamento quando $n \to \infty$, o que permite, entre muitas outras coisas, calcular soluções de equações a partir de processos aproximativos com segurança, sabendo que convergiremos para uma solução, e não para lugar nenhum.

Calcularemos as soluções de algumas EDOs mais gerais dessa maneira.

Exercício 2.3. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é completo em relação à norma euclidiana usual. Faça o mesmo para $\mathbb{C}^n$ com sua norma usual. Use seus conhecimentos de Cálculo I (supondo que você tenha aprendido em Cálculo I que $\mathbb{R}$ é completo).

Exercício 2.4. Seja $L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty \}$. Mostre que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial completo.

Exercício 2.5. Mostre que, se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então $C(K)$ é um espaço vetorial normado e completo em relação à norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Dica: mostre separadamente que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua (supondo que o seu professor de Cálculo I lhe tenha dito o que é um limite uniforme; é simplesmente o limite nessa norma com o sup).

Exercício 2.6. Acostume-se a pensar em uma função como um vetor, ou seja, como um ponto de um espaço vetorial.

3 Espaços de Banach

Apesar do nome imponente, espaços de Banach são simplesmente espaços vetoriais normados que são completos. A teoria dos espaços de Banach é extremamente rica, e existe uma extensa literatura matemática a respeito deles. Infelizmente, neste curso não vamos usar muito mais do que a mera definição do que eles são.

Esta seção foi mesmo só para dizer o nome "oficial" desses espaços. É saudável desmistificar nomenclaturas intimidatórias.

4 Espaços vetoriais de matrizes

Vamos chamar de $M(n \times m)$ o espaço das matrizes de n linhas por m colunas, com entradas reais ou complexas, como você preferir. Nós sabemos somar matrizes e multiplicá-las por escalares (reais ou complexos), o que fazemos somando ou multiplicando por escalar cada uma de suas entradas. Pronto, $M(n \times m)$ é um espaço vetorial.

Cabe a pergunta: é possível definir alguma norma nesse espaço? Ou, mais ainda: seria minimamente útil definir alguma norma nele? Ora, para começo de conversa, uma matriz $n \times m$ pode ser vista como um vetor de dimensão nm; com efeito, se conectarmos cada entrada da matriz em uma entrada do vetor de nm dimensões, a correspondência entre eles não apenas será biunívoca, como preservará as operações de soma e de multiplicação por escalar. Não é absurdo, portanto, querer induzir em $M(n \times m)$ as normas que tínhamos já ou que inventamos para $\mathbb{R}^{nm}$ (ou $\mathbb{C}^{nm}$). Por exemplo, dada uma matriz $A \in M(n \times m)$, podemos pôr

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|^2},$$

que, verifica-se, é uma norma em $M(n \times m)$ (diretamente inspirada da norma euclidiana em $\mathbb{R}^{nm}$).

Essa norma em particular é bastante utilizada, chamando-se norma de Hilbert-Schmidt. Não vamos aqui adentrar muito fundo na questão das diversas normas existentes para operadores (matrizes), mas é importante enfatizar que elas têm uma importância tremenda em quase tudo o que se faz em análise fora da reta, além de possuírem significados empíricos muito fortes. Não me pergunte agora, não neste curso, pelo menos, mas a norma de Hilbert-Schmidt é usada para medir a pureza de um estado quântico.

Quanticamente, um estado, que pode ser um estado puro (basicamente o único tipo que se vê em cursos de graduação) ou uma mistura de espaços puros, é descrito por um operador (matriz!) ρ que possui norma de Hilbert-Schmidt $0 < \|\rho\|_{HS} \leqslant 1$. Se tivermos $\|\rho\|_{HS} = 1$, então ρ representa um estado puro (daqueles que você viu ou verá em Quântica I, que podem ser representados por um vetor em um espaço de Banach incrementado com um produto escalar, o famoso espaço de Hilbert), do contrário temos uma mistura, que é tanto mais misturada quanto mais perto de 0 $\|\rho\|_{HS}$ estiver.

Enfim, essa conversa foi apenas para prender a sua atenção em um tópico que parece excessivamente abstrato, quando não se está acostumado. Voltando aos espaços vetoriais completos que estamos estudando para aplicar a EDOs, uma norma que nos será útil é a seguinte: dada $A \in M(n \times n)$ (que, como sabemos, aplica um vetor de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$), define-se:

$$\|A\|_M = \sup_{\substack{u \in \mathbb{R}^n \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Em outras palavras, essa norma é o máximo que a matriz A pode esticar um vetor de $\mathbb{R}^n$ (proporcionalmente ao seu comprimento original, é claro).

Exercício 4.1. Verifique que $\| \, \|_M$ é de fato uma norma em $M(n \times n)$.

Exercício 4.2. Mostre que $\|Au\| \leqslant \|A\|_M \|u\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 4.3. Dadas $A, B \in M(n \times n)$, mostre que $\|AB\|_M \leqslant \|A\|_M \|B\|_M$. Generalize para o produto $\Pi_{j=1}^m A_j$ de m matrizes $A_1, \ldots, A_m \in M(n \times n)$.

Observação 4.1. Em particular, esse exercício ensina que $\|A^m\|_M \leqslant \|A\|_M^m$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$, o que será uma propriedade muito útil para o estudo das EDOs lineares.

Exercício 4.4. Mostre que $M(n \times n)$ é completo em relação à norma $\| \, \|_M$.

Por ora, essa é toda a sabedoria sobre normas de matrizes de que vamos fazer uso.