

Dificuldade das EDOs, dificuldade das EDPs

Escola de Inverno IF-USP

V. Chabu

2019

1 Por que EDP é tão mais difícil?

Como já temos visto no curso, muitas vezes uma função tem todas as características importantes para poder ser considerada uma solução satisfatória de um problema diferencial, porém, por uma razão ou outra, não podemos tomá-la como solução verdadeira. Era o caso, por exemplo, das funções $u_+(x) = x$ e $u_-(x) = -x$, ambas satisfazendo, com dado inicial $u_{\pm}(0) = 0$, à equação

$$u'(u) = \frac{x}{u(x)} \quad (1)$$

em quase toda parte, ambas perfeitamente contínuas e com derivadas contínuas na reta toda, mas, sendo iguais a 0 para $x = 0$, provocando um problema de definição na (1) justamente no ponto de onde partem.

É claro que essa equação poderia ser reescrita na forma $u(x)u'(x) = x$, eliminando a divisão por 0; no entanto, como discutimos ao longo da última semana inteira, é deveras importante escrever a EDO na forma $u' = F(x, u)$, pois é através da análise das boas (ou más) características da F que conseguimos desenvolver alguma teoria geral sobre EDOs e chegar a conclusões qualitativas sobre existência, unicidade, crescimento, domínio de definição e regularidade das soluções da equação sem precisar antes obtê-las. A própria (1), lembre-se, pode gerar soluções com problemas de regularidade e de domínio de definição se tomarmos outros dados iniciais, como $u(2) = \sqrt{3}$, e a própria existência de pretensas soluções u_+ e u_- distintas, mas cruzando-se no ponto $x = 0$, só é possível porque a função característica dessa EDO, $F(x, y) = \frac{x}{y}$, não se deixa definir de maneira contínua e derivável em $y = 0$.

Esse problema é ainda mais grave na análise de EDPs, uma vez que aí estaríamos falando de equações para funções definidas em domínios com geometria bem mais complexa que a de $\mathbb{R}$, e com derivadas possuindo mais estrutura que as de funções na reta. Para uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, a título de ilustração, a derivada é uma matriz de m linhas por n colunas, em que cada entrada é a derivada parcial de uma da m componentes da função em relação a uma das n variáveis; quanto ao domínio, basta citar que os abertos de $\mathbb{R}^n$ formam uma coleção, por assim, dizer, bem mais rica que os de $\mathbb{R}$ (que, no fundo, são apenas uniões e intersecções de intervalos abertos), para não falar nos conexos, na reta apenas intervalos, em $\mathbb{R}^n$ indescritíveis de maneira tão simplista.

Ora, mas toda EDO não é, a rigor, uma EDP na reta, da mesma maneira como a derivada ordinária coincide como a única derivada parcial de uma função em $\mathbb{R}$? Sim, isso é verdade e implica que técnicas e resultados sobre EDPs podem ser transportados ao caso particular, as EDOs, não o contrário, e, ainda que muitas vezes tratar um caso particular mais simples seja uma boa maneira para encontrar o caminho para o caso geral, no campo das equações diferenciais tal estratégia não se mostrou trivial. Como não fossem as tipicidades de $\mathbb{R}^n$ com $n = 1$ em relação a $\mathbb{R}^n$ para qualquer $n \geq 2$ (repare: há um curso de cálculo ou análise para a reta, e outro para $\mathbb{R}^n$ em geral, não é um curso para a reta, outro para $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, e depois um

para $\mathbb{R}^5$ e etc; o salto está da reta para $\mathbb{R}^n$ geral), o interesse científico nas EDPs, via de regra, também é bastante distinto das motivações que levam ao estudo das EDOs.

Como em EDOs as quantidades variam com um parâmetro único, quase que universalmente elas são utilizadas para modelar fenômenos que dependem apenas do tempo, como o desenrolar de uma trajetória no espaço, o crescimento vegetativo de uma população, etc. Com EDPs, por outro lado, modelizam-se em parte fenômenos que tenham distribuição espacial, como a curvatura de uma superfície, as linhas de um campo eletrostático, em parte outros tantos que tenham uma distribuição espacial que também varia no tempo, como a propagação de uma onda, o estabelecimento de um campo elétrico, o resfriamento de um corpo extenso, dentre inúmeros, o que adiciona complexidade maior às características não somente geométricas, mas topológicas do domínio de definição das soluções das EDPs.

A seguir, veremos alguns exemplos dessas dificuldades.

2 Um problema de geometria

O potencial eletrostático em uma região de $\mathbb{R}^n$ sem cargas elétricas (ou seja, vácuo) é dado como solução da equação de Laplace:

$$\Delta u = 0, \quad (2)$$

em que $\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u$. Repare que, na reta, estamos falando de $u''(x) = 0$, que possui para dados iniciais $u(x_0) = u_0$ e $u'(x_0) = v_0$ uma única solução, globalmente definida: $u(x) = u_0 + v_0(x - x_0)$.

Ora, fisicamente o que importa é o campo elétrico, dado pelo gradiente do potencial, então devemos procurar soluções de (2) que sejam, no mínimo, uma vez deriváveis, com derivadas contínuas no interior do retângulo (do contrário, teríamos um campo elétrico descontínuo sem nenhuma interface que o justifique, o que parece fisicamente pouco convincente); por conseguinte, queremos

$$u \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

(Mais uma vez há algo a reparar: se uma solução de (2) não possuir segunda derivada que dê sentido à equação diferencial em alguns pontos (como era o caso em (1)), mas for de classe C^1 em todo o retângulo, ela seria fisicamente relevante, pois possibilitaria pelo menos calcular o campo elétrico com a primeira derivada, embora matematicamente não pudesse ser considerada uma solução no sentido clássico para (2).)

Digamos que queremos encontrar o potencial no interior de um capacitor, que tipicamente é uma tirinha de material dielétrico enrolado com eletrodos nas bordas, sendo modelizado por um retângulo $[0, B] \times [0, A]$ de $\mathbb{R}^2$. Para um domínio com essa geometria, a equação de Laplace aceita soluções das formas

$$u_P(x, y) = (k_1 e^{\omega y} + k_2 e^{-\omega y}) \cos(\omega x)$$

e

$$u_I(x, y) = (k_3 e^{\omega y} + k_4 e^{-\omega y}) \sin(\omega x),$$

quaisquer que sejam as constantes $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{C}$, as quais, *per se*, não resolvem o problema, pois é de se esperar que, dadas diferenças de potencial distintas nas bordas do capacitor, o potencial dentro dele venha a ser um ou outro.

Quais as hipóteses corretas a fazer sobre essas bordas?

Podemos imaginar um capacitor que tenha os lados $x = 0$ e $x = B$ aterrados, portanto

$$u(0, y) = u(B, y) = 0$$

para todo y , implicando que as soluções u_P devam ser descartadas e, para as u_I , que tenhamos $\omega = \frac{n\pi}{B}$, para naturais n . Se carregarmos a borda superior $y = A$ com um potencial U_0 ,

$u(x, A) = U_0$ para todo x , e a inferior também aterrarmos, $u(x, 0) = 0$ para todo x , conseguimos fixar as constantes k_3 e k_4 e descobrimos que a solução da equação de Laplace deverá ser uma sobreposição da família (u_I^n) de soluções

$$u_I^n(x, y) = U_0 \left(e^{\frac{n\pi A}{B}} - e^{-\frac{n\pi A}{B}} \right)^{-1} \left(e^{\frac{n\pi}{B}y} - e^{-\frac{n\pi}{B}y} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{B}x \right),$$

uma sobreposição da forma

$$u(x, y) = \sum_n c_n u_I^n(x, y),$$

com coeficientes c_n escolhidos precisamente de tal maneira a termos $\sum_n c_n \sin \left(\frac{n\pi x}{B} \right) = 1$ para todo $x \in (0, B)$ (lembre-se que a (2) é linear, portanto combinações lineares de suas soluções ainda são suas soluções). Escolher esses coeficientes, saber se eles existem, é altamente não óbvio.

Além disso, talvez não tenhamos feito um bom modelo para o capacitor ao aterrar seu lados $x = 0$ e $x = B$. Bem poderia ser que tivéssemos dois eletrodos paralelos em $y = 0$ e $y = A$, um aterrado e outro carregado, mas que nas laterais tivéssemos placas metálicas isoladas das placas horizontais. Nesse caso, o melhor que podemos dizer é que o campo elétrico $E = (E_x, E_y)$ se anula em um material condutor, portanto, por continuidade, sua componente E_x deve ser 0 para $x = 0$ e $x = B$. Ora, $E = -\nabla u$, em que temos $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$; seguem condições

$$\frac{\partial}{\partial x} u_P(0, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_P(B, y) = 0$$

para todo y , as quais não podem ser satisfeitas pelas soluções u_I (a serem, portanto, descartadas) e as quais impõem, para as u_P , que seja $\omega = \frac{n\pi}{B}$, para naturais n ; ajustando por fim $u(x, 0) = 0$ e $u(x, A) = U_0$ para todo x , conseguimos:

$$u_P^n(x, y) = U_0 \left(e^{\frac{n\pi A}{B}} - e^{-\frac{n\pi A}{B}} \right)^{-1} \left(e^{\frac{n\pi}{B}y} - e^{-\frac{n\pi}{B}y} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{B}x \right),$$

e precisaremos pesquisar por coeficientes d_n tais que $\sum_n d_n \cos \left(\frac{n\pi}{B}x \right) = 1$ para todo $x \in (0, B)$, isso a fim de encontrarmos a solução para a equação (1) na forma

$$u = \sum_n d_n u_P^n(x, y)$$

que respeite os potenciais aplicados nos eletrodos do capacitor. Mais uma vez, é tudo menos óbvio que tais coeficientes existam e, se existirem, como encontrá-los.

Moral da história: mudando as condições de fronteira do problema diferencial, conhecidas ainda como condições de contorno, mudou-se a família de soluções que resolve ao mesmo tempo a equação e essas condições, ou seja, a geometria do problema influi fortemente no tipo de soluções permitidas.

E, para terminar, verifique que, para além de soluções oscilatórias e exponenciais, a função

$$u(x, y) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

também resolve (2) no interior do retângulo $[0, B] \times [0, A]$, mas não lhe dá a menor chance de ajustar as condições de contorno propostas acima.

3 Um problema de topologia

Uma partícula livre em $\mathbb{R}^n$, com um estado inicial descrito por uma função “de onda” Ψ_0 , evolui segundo a equação de Schrödinger:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(x) = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta \Psi_t(x), \\ \Psi_{t_0}(x) = \Psi_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

Isso significa que, no instante t , a densidade de probabilidade de encontrar essa partícula em alguma região do espaço é dada pela função $x \mapsto |\Psi_t(x)|^2$; assim, se quisermos saber qual é a probabilidade, nesse instante, de encontrá-la na região $A \subset \mathbb{R}^n$, ela será dada por:

$$P_t(A) = \int_A |\Psi_t(x)|^2 dx;$$

da mesma maneira, por exemplo, se quisermos calcular a média de suas possíveis posições nesse instante, teríamos:

$$\bar{x}_t = \int_{\mathbb{R}^n} x |\Psi_t(x)|^2 dx.$$

Como toda densidade de probabilidade, Ψ_t deve ser normalizável; em outras palavras, se a partícula existe, a probabilidade de encontrá-la em algum lugar do espaço todo é 1, o que impõe sobre as soluções de (3) a condição:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Psi_t(x)|^2 dx = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

por isso, para todo t devemos procurar por soluções que pertençam ao espaço de funções de quadrado integrável:

$$\Psi_t \in L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Por que exigimos apenas $\int |f|^2 < \infty$, e não $\int |f|^2 = 1$? Porque $L^2(\mathbb{R}^n)$ definido dessa forma vira um espaço vetorial, e se uma f_t pertence a esse espaço e satisfaz a (3), então $\tilde{f}_t = (\int |f|^2)^{-1} f_t$ também é solução de (3) (já que a equação de Schrödinger é linear e $(\int |f|^2)^{-1}$ revela-se uma constante), e teremos $\int |\tilde{f}_t|^2 = 1$, facultando a $\tilde{f}$ que represente uma distribuição de probabilidade. Assim, não perdemos nada e de quebra ganhamos estrutura vetorial no espaço de soluções com que vamos trabalhar.

Esse comportamento especial que Ψ deve apresentar nas variáveis espaciais, e não na temporal, faz com que seja mais vantajoso olhá-la não como uma função de $n + 1$ variáveis, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, mas como uma função de $t \in \mathbb{R}$ a valores no espaço vetorial $L^2(\mathbb{R}^n)$, algo como:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Psi_t \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

$L^2(\mathbb{R}^n)$ é (na verdade, esse $L^2(\mathbb{R}^n)$ que definimos, a menos de funções que coincidam em quase toda parte) um espaço vetorial completo em relação à norma $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx}$, possuidor de características adicionais (ser espaço de Hilbert separável) que o fazem muitíssimo similar aos espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$, ainda que não totalmente análogo (em $L^2(\mathbb{R}^n)$, *e.g.*, ser compacto não é a mesma coisa que ser limitado e fechado). À luz dessas observações, a equação de Schrödinger pode ser entendida como uma genuína EDO para funções vetoriais valoradas em $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} \Psi'(t) = -\frac{i}{\hbar} H \Psi(t), \\ \Psi(t_0) = \Psi_0, \end{cases}$$

em que o operador $H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta$, ainda por cima, é linear!

No caso euclidiano, H seria uma matriz, teria uma norma matricial $\|H\|_M$ finita, e por isso faria sentido definir a sua exponencial por meio de uma série de Taylor, $e^H = \sum \frac{H^n}{n!}$, possibilitando escrever a solução da EDO como a matriz e^{tH} aplicada ao dado inicial. Isso só não é verdade no caso de $L^2(\mathbb{R}^n)$ porque, na norma dos operadores nesse espaço,

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\substack{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \\ u \neq 0}} \frac{\|Au\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}},$$

H não se mostra limitado, e a série de Taylor em questão não convergiria a operador nenhum. Tal revés seria uma tragédia se não dispuséssemos de outros recursos matemáticos que permitissem construir uma função exponencial do operador H , dando sentido a uma função a valores operatórios e^{tH} cuja derivada seja He^{tH} , algo que se faz por vias da Teoria Espectral. Por aí encontra-se a solução formal e rigorosa da equação de Schrödinger,

$$\Psi_t(x) = \left(e^{-\frac{it}{\hbar}H} \Psi_0 \right)(x),$$

em todos os casos em que o operador H for tal a fornecer um sentido à sua exponencial (a saber, sempre que H for o que se chama de autoadjunto).

Apesar desse tratamento teórico bastante similar ao das EDOs, o cálculo de Ψ_t a partir da exponencial de H é, no mais das vezes, extremamente complexo (exceto no caso livre, em que essa exponencial se calcula sem muito sofrimento, mesmo numericamente), e a obtenção de soluções concretas para (3) acaba se fazendo por técnicas típicas de EDP, não de EDO, olhando Ψ como função de $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sem privilegiar qualquer das coordenadas, e apenas ao fim dos cálculos impor que a integral em x de $|\Psi|^2$ deve dar 1 para todo t .

Nesse caso, procuraríamos por soluções $\Psi_t(x) = T(t)X(x)$, com funções $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo ao mesmo tempo:

$$T'(t) = -\frac{i}{\hbar}ET(t)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta X(x) = EX(x),$$

para alguma constante $E \in \mathbb{C}$. Somente por ilustração, tomemos $\mathbb{R}^n$ com $n = 1$ e obtenhamos soluções da forma:

$$\Psi_t^E(x) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \left(k_{1,E} \cos \left(\frac{\sqrt{2E}}{\hbar}x \right) + k_{2,E} \sin \left(\frac{\sqrt{2E}}{\hbar}x \right) \right),$$

com constantes $k_{1,E}$ e $k_{2,E}$ a ajustar.

Observe que, fixado t , nenhuma delas é $L^2(\mathbb{R})$ em x , então, se quisermos representar densidades de probabilidade em x , ainda necessitaremos encontrar algum jeito de compor as soluções da família acima com diferentes valores para E , de modo a poder normalizá-las na parte espacial e, para $t = t_0$, reobter Ψ_0 .

4 Mais problemas

No caso da equação de Laplace, encontramos pistas de candidatos a solução do problema do potencial elétrico no capacitor; não os encontramos propriamente, pois não sabemos, *a priori*, se é possível determinar aqueles coeficientes c_n e d_n de que falamos. Em outras palavras, ainda não sabemos nem mesmo se a solução existirá. Ainda que exista, ficaríamos sem saber se ela seria única, pois tudo o que prendemos na análise da equação (2) veio de duas classes de solução u_P e u_I que encontramos fortuitamente, sem ter demonstrado que outros tipos de soluções não poderiam resolver o problema diferencial com condições de fronteira.

Já para a equação de Schrödinger, foi possível reduzi-la a uma espécie de EDO, ainda que para funções valoradas em um espaço vetorial de dimensão infinita. Ocorre que a função característica dessa suposta EDO é dada por H , um operador não limitado e, portanto, não contínuo em $L^2(\mathbb{R}^n)$; é como se tivéssemos uma $F(x, y)$ constante em x , mas descontínua em y para uma quantidade até que grande de pontos. Consequentemente, também seria prematuro presumir que a solução dada por $t \mapsto e^{-\frac{it}{\hbar}H} \Psi_0$ seja a única, embora já saibamos que a (3) possui, a cada $\Psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ inicial, pelo menos essa solução.

Uma equação como a de Laplace, na realidade, possui sim soluções, e o problema de Laplace com condições de contorno razoavelmente tratáveis (como as que demos de exemplo) possui solução única. A equação de Schrödinger, ao contrário, parece não ter precisado das condições de borda, apenas de um dado inicial Ψ_0 . Na realidade, o operador H só pode ser considerado auto-adjunto em certos domínios que são subespaços de $L^2(\mathbb{R}^n)$, e a configuração do domínio de um operador em dimensão infinita ocasiona o curioso e inesperado efeito de mudar completamente a sua natureza; assim, resulta que as condições de fronteira vêm embutidas quando se elege um subespaço de $L^2(\mathbb{R}^n)$ para ser domínio de H , algo que passou completamente despercebido quando tentamos tratar a (3) como uma EDO valorada em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Para outras EDPs, como a equação de ondas,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad (4)$$

pode-se mostrar unicidade e existência para soluções satisfazendo ao mesmo tempo condições iniciais, $u(x, t_0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = v_0(x)$ para todo x , e de fronteira, seja $u(S, t) = 0$, seja $\nabla u(S, t) = 0$ para todo t (ou uma combinação dessas), com S a fronteira do domínio em que se procura resolver a EDP.

Para terminar, observe que na equação de Schrödinger havia apenas um perfil inicial a determinar, o da própria função, $\Psi(t_0, x) = \Psi_0(x)$, e na de ondas há dois: o da própria função e o da sua derivada temporal. Será que isso tem a ver com o fato de (3) ser de ordem 1 em t , e a (4) de ordem 2?