Roteiro para o relatório VII – Cordas vibrantes

M. F. A. de Resende   Instituto de Física - USP

Data limite para a entrega: 25 de junho

Resumo

O objetivo desse trabalho é verificar experimentalmente se o modelo teórico assumido, para o comportamento das frequências de ressonância de um fio posto a vibrar, é adequado ou não.

1 Informações gerais

O relatório associado a esse experimento deve ser feito supondo que o comportamento das frequências f de ressonância de um fio inextensível, convenientemente preso em suas extremidades, e posto a vibrar sob a influência de uma perturbação periódica, é dado por

$$f\,(n, L, \mu, F) = k\; n^A L^B \mu^C F^D \quad , \tag{1}$$

sendo

- n o número de modos de vibração presentes no fio,
- L e μ os respectivos comprimento e densidades do mesmo, e
- F é a força peso utilizada para tensioná-lo, conforme o esquema apresentado na Figura 1.

No caso, k, A, B, C e D são constantes a serem determinadas, de forma que seja possível realizar o confronto desses resultados, experimentalmente obtidos, com os previstos teoricamente, uma vez que, de acordo com a modelagem feita para um sistema ideal, temos

$$f\,(n, L, \mu, F) = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{2} n^1 L^{-1} \mu^{-1/2} F^{1/2} \quad . \tag{2}$$

2 Sobre a elaboração do relatório

Nesse trabalho devem ser apresentados, no mínimo, 4 (quatro) gráficos confeccionados em papel dilog para que, através deles e do consequente ajuste de retas máximas e mínimas, seja possível estimar os quatro expoentes que figuram em (1), segundo o raciocínio exposto na sequência.

2.1 Estimando os coeficientes

De acordo com a igualdade (1), torna-se claro que, ao fixar 3 (três) das 4 (quatro) variáveis experimentais nela presentes, a mesma igualdade pode ser interpretada como uma função de uma única variável. Ou seja, tomando o caso onde são fixas as variáveis L, μ, e F por exemplo, temos que

$$f_A(n) = f(n; L, \mu, F = cte) = K_A n^A \quad , \quad \text{sendo } K_A = kL^B \mu^C F^D \quad .$$

Com efeito desse resultado, plotando num papel dilog os pontos experimentais associados a essa situação, a escala desse mesmo papel irá linearizar automaticamente o conjunto de dados, haja vista que

$$\log f_A = \log\left(K_A n^A\right) = \log K_A + A \log n \;\Rightarrow\; y(x) = a + Ax \quad ,$$

onde na última passagem realizamos uma mudança de variáveis, especificamente dada por

$$x = \log n \quad , \quad \text{e} \quad a = \log K_A = cte \quad .$$

Dessa forma o expoente $A = \left(\bar{A} \pm \sigma_A\right)$, agora interpretado como um coeficiente angular, pode ser estimado pelo ajuste de retas máximas e mínimas.

O mesmo raciocínio pode, e deve, ser estendido as demais variáveis para a estimativa dos demais expoentes procurados. Nessas novas situações, a plotagem dos dados pertinentes serão tais que

(i) para a determinação do coeficiente B

$$\log f_B = \log\left(K_B L^B\right) = \log K_B + B \log L \;\Rightarrow\; y(x) = b + Bx \quad ,$$

onde

$$x = \log L \quad , \quad \text{e} \quad b = \log K_B \quad , \quad \text{com } K_B = kn^A \mu^C F^D = cte \quad .$$

(ii) para a determinação do coeficiente C

$$\log f_C = \log\left(K_C \mu^C\right) = \log K_C + C \log \mu \;\Rightarrow\; y(x) = c + Cx \quad ,$$

onde

$$x = \log \mu \quad , \quad \text{e} \quad c = \log K_c \quad , \quad \text{com } K_C = kn^A L^B F^D = cte \quad .$$

(iii) para a determinação do coeficiente D

$$\log f_D = \log\left(K_D F^D\right) = \log K_D + D\log F \;\Rightarrow\; y\,(x) = d + Dx \quad ,$$

onde

$$x = \log F \quad , \quad \text{e} \quad d = \log K_D \quad , \quad \text{com } K_D = kn^A L^B \mu^C = cte \quad .$$

Assim, por todo o exposto acima, os expoentes $B = \left(\bar{B} \pm \sigma_B\right)$, $C = \left(\bar{C} \pm \sigma_C\right)$, $D = \left(\bar{D} \pm \sigma_D\right)$, agora interpretados como coeficientes angulares, de acordo com prisma oferecido pelas escalas presentes nos papéis dilog, também podem ser estimados através dos ajustes de retas máximas e mínimas.

2.2 Confronto de dados

Após a determinação de todos os expoentes suprarreferidos, deve ser necessariamente apresentado um confronto desses resultados com os previstos pelo modelo (2). Para isso, uma das possibilidades, por exemplo, é utilizar o "teste Z" para os dados envolvidos.

Outra coisa que deve constar obrigatoriamente no relatório, é uma estimativa para a constante $k = \left(\bar{k} \pm \sigma_k\right)$ que aparece em (1). Existem diversos métodos pelos quais esse resultado pode ser obtido e, por esse motivo, os alunos ficarão inteiramente livres para utilizar o método que pareça-lhes mais conveniente. Com esse resultado em mãos, também deve ser feito um confronto desse com aquele previsto em (2).

3 Pontuação bônus

Muito embora na igualdade (1) a modelagem feita trate μ como uma variável de significância experimental, ao invés disso poderíamos trabalhar com uma outra variável que mostre-se equivalente nessa situação. Uma das que, por exemplo, posta-se como razoável, na caracterização de qualquer um dos fios utilizados, é o diâmetro ϕ.

Supondo não apenas que cada um dos fios utilizados possui uma distribuição uniforme de massa[1], mas que a geometria deles pode ser aproximada pela de um cilindro, teremos, por exemplo, que a massa total M de um dos exemplares estudados é dada por

$$M = \rho V = \frac{\rho\pi L}{4}\phi^2 \quad , \tag{3}$$

[1] Situação que fica caracterizada por uma densidade volumétrica ρ constante do fio considerado.

dado que o volume V de qualquer cilindro é

$$V = \text{base} \times \text{comprimento} = \pi r^2 L = \frac{\pi L}{4}\phi^2 \quad ,$$

com r sendo o raio associado nessa situação. Dessa maneira torna-se claro que, sob o uso do resultado (3), teremos

$$\mu = \frac{M}{L} = \frac{\rho\pi}{4}\phi^2 \quad , \tag{4}$$

mostrando a equivalência do tratamento de dados baseados em (1), com aquela modelada, por exemplo, como

$$f\,(n, L, \phi, F) = k'\, n^A L^B \phi^S F^D \quad , \tag{5}$$

onde k' e S são constantes que também podem ser determinadas, analogamente ao caso anterior.

A proposta que fica nesse novo caso, é a de obter um valor para o expoente $S = \left(\bar{S} \pm \sigma_S\right)$, utilizando exatamente os mesmos dados que foram fixados para a obtenção de $C = \left(\bar{C} \pm \sigma_C\right)$. Nessa situação, as escalas presentes no papel dilog utilizado para a plotagem de dados fará uma linearização desses, de modo que

$$\log f_S = \log\left(K_S \phi^S\right) = \log K_S + S \log\phi \;\Rightarrow\; y\,(x) = s + Sx \quad ,$$

onde

$$x = \log\phi \quad , \quad \text{e} \quad s = \log K_S \quad , \quad \text{com } K_S = k' n^A L^B F^D = cte \quad .$$

Assim, frente ao valor estimado para $S = \left(\bar{S} \pm \sigma_S\right)$, deverá haver um confronto desse resultado com o obtido anteriormente para $C = \left(\bar{C} \pm \sigma_C\right)$, haja vista o relacionamento (4): ou seja, se ambas as modelagens forem razoáveis, S deverá ser o dobro de C.

Muito embora esse estudo não seja obrigatório, aqueles que o apresentarem junto ao relatório como um Apêndice, terão uma pontuação extra. Supondo que a resolução associada esteja correta, a pontuação bônus consistirá em

- acrescer 1 (um) ponto à nota final do relatório, se a nota original desse estiver entre 0 (zero) e 9 (nove), ou

- arredondar a nota original para 10 (dez), caso contrário.

4 Coisas eventualmente úteis

4.1 Sobre a compatibilidade de dados

TESTE Z : Supondo que os valores experimentais resumidos em $x_1 = (\bar{x}_1 \pm \sigma_1)$ e $x_2 = (\bar{x}_2 \pm \sigma_2)$ seguem uma distribuição normal, diremos que eles são compatíveis se

$$Z = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2}} \lesssim 3 \quad .$$