# Roteiro para o relatório III

# Distância focal de uma lente convergente

M. F. A. de Resende     Instituto de Física - USP

Data limite para a entrega: 18 de abril

**Resumo**

O objetivo desse trabalho é calcular a distância focal de uma lente convergente, supondo que essa é delgada o suficiente, de modo que comportamento das imagens por ela formada segue a *Lei de Gauss*; no caso, para um objeto distando $o$ dessa lente, deve ser válido que

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \quad , \tag{1}$$

sendo $f$ a distância focal associada à lente, e $i$ a distância entre a imagem formada e a mesma lente.

## 1 Informações gerais

Antes de serem apresentadas as informações diretas que referem-se aos eventuais cálculos e resultados das distâncias focais obtidas, deverá constar obrigatoriamente no relatório uma seção onde conste toda a descrição prática do experimento, com todos os detalhes técnicos a respeito da montagem do equipamento utilizado.

Cabe frisar que, do mesmo modo que nos relatórios anteriores, todos os dados experimentalmente obtidos deverão ser apresentados, de forma clara, através de tabelas bem identificadas, enumeradas e legendadas. Apenas para reforçar, nessas tabelas as medidas que referem-se às distâncias do objeto e da imagem formada pela lente em relação à mesma, expressar-se-ão respectivamente por

$$o_n = (\bar{o}_n \pm \sigma_{o,n}) \quad , \quad i_n = (\bar{i}_n \pm \sigma_{i,n}) \quad , \quad \text{com} \quad n = 1, \ldots, 10 \quad .$$

## 2 Sobre o cálculo da distância focal

### 2.1 Lente convergente

Haja vista a existência de 10 combinações diferentes entre $o_n$ e $i_n$, faz-se possível obter 10 estimativas distintas para a distância focal da lente suprarreferida: no caso, cada uma das distâncias focais $f_n = \left(\bar{f}_n \pm \sigma_{f,n}\right)$ pode ser obtida através da relação (1). Nesse caso em particular, a incerteza $\sigma_{f,n}$ dá-se, como consequência do cálculo de propagação de todas as incertezas envolvidas, por[1]

$$\sigma_{f,n} = \bar{f}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{o,n}}{\bar{o}^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{i,n}}{\bar{i}^2}\right)^2} \tag{2}$$

Frente a esses resultados[2], e como um único valor $f_C = \left(\bar{f}_C \pm \sigma_C\right)$ deverá ser atribuído à distância focal, podemos obtê-lo por meio do cálculo de uma média ponderada, analogamente ao realizado no experimento anterior: ou seja,

$$f_C = \frac{\sum_{n=1}^{10} P_n \bar{f}_n}{\sum_{j=1}^{10} P_j} \quad , \quad \text{com} \quad P_j = \frac{1}{(\sigma_j)^2} \quad \text{e} \quad \sigma_C = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^{n} P_j}} \quad .$$

### 2.2 Lente divergente

Embora o objetivo principal deste trabalho, como o próprio título já diz, seja o de calcular a distância focal de uma lente convergente, com o auxílio de uma dessas lentes torna-se possível estimar a distância focal $f_D$ de outra também delgada, porém divergente, conforme verificou-se no decorrer do experimento.

Para a particular situação de uma imagem real produzida pela combinação de duas lentes suficientemente delgadas[3] a relação existente, por exemplo, entre os focos destas dá-se por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad , \tag{3}$$

onde $d$ é a distância existente entre as duas lentes em questão, e $f$ é o foco resultante desta combinação.

Assim, assumindo que $f_1 = f_C$ e $f_2 = f_D$, e tendo em mãos ao menos uma medida dos posicionamentos dos objeto e imagem em relação às lentes, podemos estimar um valor para $f_D$ através de (3), frente à distância $d$ existente entre elas.

[1] A demonstração desse particular resultado encontra-se na Seção 3.1.
[2] Todos experimentalmente independentes, embora relacionados à mesma lente.
[3] Ou seja, cujo posicionamento dos objetos e imagens em relação às lentes modelam-se por (1), dado as distâncias focais envolvidas.

### 2.3 Objetivo do relatório

Verificar se os resultados obtidos para as distâncias focais das lentes suprarreferidas podem ser considerados compatíveis com os aferidos pelo fabricante: isso deverá ser feito por meio do "teste Z".

TESTE Z : Supondo que os valores experimentais resumidos em $x_1 = (\bar{x}_1 \pm \sigma_1)$ e $x_2 = (\bar{x}_2 \pm \sigma_2)$ seguem uma distribuição normal, diremos que eles são compatíveis se

$$Z = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2}} \lesssim 3 \quad .$$

## 3 Propagação da incerteza para a distância focal

De acordo com (1), temos que

$$\frac{1}{f} = \frac{o+i}{o\,i} \;\Rightarrow\; f = \frac{o\,i}{o+i} \quad ; \tag{4}$$

ou seja, $f$ pode ser interpretada como uma função localmente contínua das variáveis $o$ e $i$. Desta maneira, uma vez que, por exemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial o} = \frac{i}{o+i} - \frac{o\,i}{(o+i)^2} = \frac{i}{o+i}\,\frac{o+i}{o+i} - \frac{o\,i}{(o+i)^2} = \frac{o\,i + i^2}{(o+i)^2} - \frac{o\,i}{(o+i)^2} = \left(\frac{i}{o+i}\right)^2 \quad ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial i} = \frac{o}{o+i} - \frac{o\,i}{(o+i)^2} = \frac{o}{o+i}\,\frac{o+i}{o+i} - \frac{o\,i}{(o+i)^2} = \frac{o^2 + o\,i}{(o+i)^2} - \frac{o\,i}{(o+i)^2} = \left(\frac{o}{o+i}\right)^2 \quad ,$$

as suas substituições em

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial o}\right)^2 (\sigma_o)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial i}\right)^2 (\sigma_i)^2}$$

permitem notar que

$$\begin{aligned}
\sigma_f &= \sqrt{\left(\frac{i}{o+i}\right)^4 (\sigma_o)^2 + \left(\frac{o}{o+i}\right)^4 (\sigma_i)^2} \\
&= \sqrt{\frac{o^4}{o^4}\left(\frac{i}{o+i}\right)^4 (\sigma_o)^2 + \frac{i^4}{i^4}\left(\frac{o}{o+i}\right)^4 (\sigma_i)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{o\,i}{o+i}\right)^4 \left(\frac{\sigma_o}{o^2}\right)^2 + \left(\frac{o\,i}{o+i}\right)^4 \left(\frac{\sigma_i}{i^2}\right)^2} \quad .
\end{aligned}$$

Logo, sob o uso de (1), a última igualdade torna-se

$$
\begin{aligned}
\sigma_f &= \sqrt{f^4\left[\left(\frac{\sigma_o}{o^2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_i}{i^2}\right)^2\right]} \\
&\phantom{=}\ f^2\sqrt{\left(\frac{\sigma_o}{o^2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_i}{i^2}\right)^2} \quad .
\end{aligned}
$$