Alguns comentários sobre o pêndulo simples e a obtenção do seu período

M. F. A. de Resende   Instituto de Física - USP

Tomemos como objeto de nosso estudo um pêndulo simples; ou seja, um sistema físico constituído por um objeto de massa m não nula suspenso por um fio inextensível, cujo comprimento é L, com massa desprezível e que prende-se a um ponto fixo no espaço.

Supondo que no movimento do objeto as únicas forças que atuam sobre ele são as forças peso e de tração, a equação que descreve este movimento é dada por

$$m\frac{d^2\theta}{dt^2} + m\frac{g}{L}\sin\theta = 0 \ ,$$

onde $\theta : I \to \mathbb{R}$ é a função que descreve o ângulo existente entre o fio e um dos vetores do campo gravitacional durante o movimento[1].

Considerando que o pêndulo executa pequenas oscilações, podemos assumir que $\sin\theta \approx \theta$. Assim a equação de movimento reescreve-se como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \ , \text{ com } \ \omega^2 = g/L \ . \tag{1}$$

Trata-se de uma equação que pode ser resolvida facilmente: para isso, basta assumir que a sua solução é da forma $\theta(t) = e^{rt}$, sendo r uma constante a ser determinada[2].

Com efeito da substituição dessa $\theta(t)$ na equação (1), vemos que

$$\left(r^2 + \omega^2\right)e^{rt} = 0 \quad .$$

Desta maneira, assumindo que $\theta(t)$ não possui uma solução identicamente nula, torna-se claro que

$$\left(r^2 + \omega^2\right) = (r - i\omega)(r + i\omega) = 0 \quad .$$

Ou seja, os valores de r que ajustam-se a função teste $\theta(t)$, para que ela seja uma solução de (1), são $-i\omega$ e $i\omega$. Logo,

$$\theta_1(t) = e^{-i\omega t} \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = e^{i\omega t}$$

[1] Aqui g é o módulo da aceleração da gravidade.

[2] Trata-se de uma suposição perfeitamente válida haja vista que, a própria (1), indica apenas uma constante figura como como a única diferença entre $\theta(t)$ e a sua derivada segunda.

servem como soluções para a equação diferencial suprarreferida, assim como

$$\theta\left(t\right) = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \tag{2}$$

também servirá, desde que a e b sejam duas constantes arbitrárias. Por se dizer, essa última observação segue do simples fato de que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega^2\theta_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a\,\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + a\,\omega^2\theta_1 = 0 \quad , \\
\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega^2\theta_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad b\,\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + b\,\omega^2\theta_2 = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

remontam a

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(a\,\theta_1 + b\,\theta_2\right) + \omega^2\left(a\,\theta_1 + b\,\theta_2\right) = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Algo extremamente útil que podemos fazer com (2), é reescrevê-la em termos das funções seno e cosseno. Tendo em vista, por exemplo, que $e^{\pm irt} = \cos\left(rt\right) + i\sin\left(rt\right)$, torna-se claro que

$$\begin{aligned}
\theta\left(t\right) &= a\left[\cos\left(\omega t\right) + i\sin\left(\omega t\right)\right] + b\left[\cos\left(\omega t\right) - i\sin\left(\omega t\right)\right] \\
&= \left(a+b\right)\cos\left(\omega t\right) + i\left(a-b\right)\sin\left(\omega t\right) = A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right) \quad ,
\end{aligned}$$

com $A = a + b$, e $B = i\left(a+b\right)$ figurando como as "novas" constantes, a qual continua sendo uma solução de (1). Dessa maneira, como para um $x \in \mathbb{R}$, as funções $\sin x$ e $\cos x$ têm um período igual a $2\pi n$, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, o período associado especificamente a $\theta\left(t\right)$ fica dado por

$$T_n = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi n\sqrt{\frac{L}{g}} \quad , \tag{3}$$

onde $T = T_1$ é o chamado *período fundamental* relacionado ao pêndulo simples.