4300152 - Introdução às medidas em Física

AULA 2 : Sobre histogramas , gaussianas e desvios padrões

Profa. Maria Fernanda Araujo de Resende

Departamento de Física Matemática - Instituto de Física - USP

Março de 2011

Medições $\rightarrow$ obter um valor experimental para algo de interesse físico

- O valor verdadeiro μ existe , mas é desconhecido
- O resultado experimental representa apenas um conjunto de dados aceitáveis

$$x = (\bar{x} \pm \sigma_x) \quad \rightarrow \quad \bar{x} : \text{ valor medido} \quad , \quad \sigma_x : \text{ incerteza da medição}$$

A incerteza é composta por diversos fatores

- Se temos uma amostra de dados independentes , existe uma contribuição estatística σ_E para a incerteza total σ_x

σ_E se relaciona com a dispersão de dados em torno da média

- Considerando N dados independentes

$$\text{média} \quad : \quad \bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j$$

$$\text{variância} \quad : \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \mu)^2 \quad \rightarrow \quad \textbf{PROBLEMA:} \ \mu \text{ é desconhecido !}$$

Contorno do problema

- Substituir na variância

$$\mu \to \bar{x} \quad , \quad N \to N-1$$

Ou seja ,

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (x_j - \bar{x})^2$$

σ^2 e s^2 tendem ao mesmo resultado quando $N \to \infty$

  - variância $\to$ estimativa para a dispersão dos dados

Desvio padrão : $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

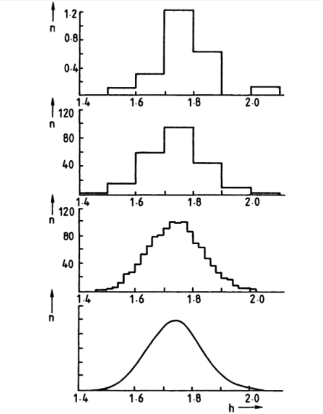
- No caso amostral $\to$ $\sigma_{N-1} = \sqrt{s^2}$

  Incerteza estatística : $\sigma_E = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$

  - Serve para indicar a *acurácia* na determinação do valor médio $\bar{x}$

Como o desvio padrão pode ser estimado de um histograma ?

Exemplo : Altura de homens com 30 anos de idade

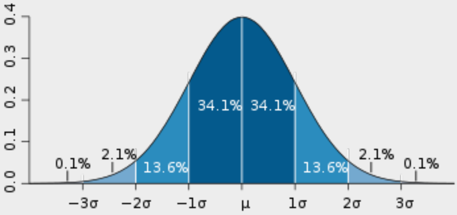


Como o desvio padrão pode ser estimado de um histograma ?

- Quanto mais dados e "bins" menores , o histograma tende a uma distribuição contínua

  No caso , a distribuição pode ser interpretada com uma curva gaussiana

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$



Trata-se da mesma silhueta da figura anterior !

Como o desvio padrão pode ser estimado de um histograma ?

- A área compreendida entre a gaussiana e a abcissa vale 1 (um)
  - O mesmo ocorre com um histograma construído em termos das densidades

    Neste caso , a soma de todos os retângulos do histograma vale 1 *(um)*
- O ponto de máximo na gaussiana ocorre quando $x = \mu$
  - Vale lembrar que μ é o valor verdadeiro (desconhecido)
- A altura da gaussiana em $x = \mu \pm \sigma$ possui $1/\sqrt{e} \approx 0{,}6$ do valor máximo
  - Deste modo σ pode ser estimado de um histograma como a metade da largura quando tomados $2/3$ da altura máxima

Outra propriedade interessante :

A área compreendida entre a gaussiana e

- $\mu - \sigma \leqslant x \leqslant \mu + \sigma$ representa $\approx 68\%$ da total
- $\mu - 2\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 2\sigma$ representa $\approx 95\%$ da total
- $\mu - 3\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 3\sigma$ representa $\approx 99{,}7\%$ da total

Como dizer se um resultado experimental é compatível com outro valor ?

- Assumimos que os resultados experimentais se adaptam à uma distribuição gaussiana
  - $x = (\bar{x} \pm \sigma_x) \quad \rightarrow$ neste caso σ_x deve ser “interpretado” como um desvio padrão

Exemplo 1 $\rightarrow$ situação simples :

- o experimento traz $T = \bar{T} \pm \sigma_T = (950 \pm 20)$ s
- enquanto a teoria indica $\mu = 910$ s

Esses dois valores estão de acordo ?

Para responder , podemos usar o *teste Z*

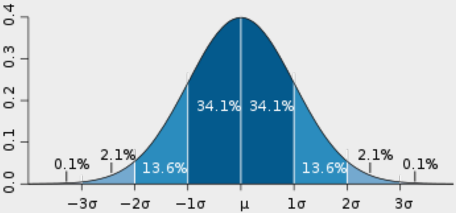
$$Z = \frac{|\bar{T} - \mu|}{\sigma_T} = \frac{|950 - 910|}{20} = \frac{40}{20} = 2$$

- No caso, denominador e numerador são interpretados como duas **distâncias**
  - $\bar{T}$ está a uma distância $2\sigma_T$ do valor verdadeiro μ

$$|\bar{T} - \mu| = 2\sigma_T$$

Como dizer se um resultado experimental é compatível com outro valor ?

"Regra" : $Z \leqslant 3 \quad \rightarrow \quad$ existe compatibilidade



Interpretação geométrica :

- A gaussiana possui valores muito pequenos quando $|x-\mu| > 3\sigma_x$
  - Para fins práticos , tomamos sua largura como sendo $6\sigma_x$
- Então se μ pertence a $\bar{x}-3\sigma_x \leqslant x \leqslant \bar{x}+3\sigma_x$, dizemos que os resultados concordam

Exemplo 1 $\rightarrow Z = 2$

Logo T é compatível com μ

Como dizer se dois resultados experimentais são compatíveis ?

Exemplo 2 → caso real :

- um experimento traz $x_1 = \bar{x}_1 \pm \sigma_1$
- outro experimento traz $x_2 = \bar{x}_2 \pm \sigma_2$

Quando esses dois valores podem ser considerados compatíveis ?

Fato : σ_1 e σ_2 continuam sendo duas distâncias

A combinação $\sigma' = \sqrt{(\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2}$ **também é uma distância !**

"Novo" teste Z $\rightarrow$ $Z = \dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sigma'}$ $\leftarrow$ **recaímos na situação anterior**

Moral da história :

- x_1 e x_2 serão compatíveis se $Z \leqslant 3$

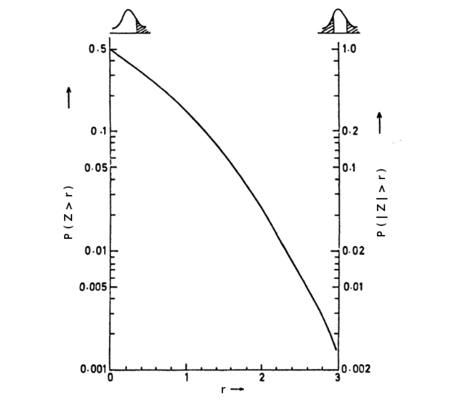
  Interpretação geométrica :

$$\bar{x}_1 - 3\sigma_1 \leqslant x \leqslant \bar{x}_1 + 3\sigma_1 \quad \text{e} \quad \bar{x}_2 - 3\sigma_2 \leqslant x \leqslant \bar{x}_2 + 3\sigma_2$$

  têm intersecção não nula

Em verdade , o teste Z permite

- determinar a área da gaussiana tal que $|Z| > r$



- avaliar se a teoria ou o experimento são satisfatórios ou não , supondo sempre que
  - tudo foi bem calculado , principalmente o erro
  - a aproximação gaussiana é razoável

No entanto :

- Em situações reais , os dados experimentais podem ter largos desvios
  - Podemos até mesmo não ter uma distribuição gaussiana
- Consideramos σ' como o valor verdadeiro do erro experimental
  - Para uma estimativa baseada na dispersão dos dados , a melhor aproximação será uma *t-Student*