Uma introdução aos grupos e representações

Segunda lista de exercícios

Exercício 1

Um dos corolários do *Teorema de Lagrange* é que um grupo G, que tem ordem $|G|$ par maior que *dois*, possui subgrupos distintos do trivial e dele mesmo. No caso, a ordem $|H_j|$ de um desses subgrupos H_j é sempre tal que

$$|G| \ = \ r \ \cdot \ |H_j| \quad ,$$

onde r é uma número natural diferente de zero.

Considerando uma situação onde o subgrupo H que possui a maior ordem $|H| \ < \ |G|$ é *único*, é válido afirmar que esse subgrupo é *invariante*? Ou seja, é válido afirmar que $gHg^{-1} \ = \ H$? Justifique a sua resposta.

Exercício 2

Sejam o grupo $G = C_3 = \{ \ a : a^3 = e \ \}$ e as matrizes

$$A \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B \ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C \ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

1. Mostre que cada uma das funções $\rho_j : G \to GL\,(2, \mathbb{C})$, definidas como

$$\rho_1\,(a^n) \ = \ A^n \quad , \quad \rho_2\,(a^n) \ = \ B^n \quad \text{e} \quad \rho_3\,(a^n) \ = \ C^n \quad (\ 0 \leqslant n \leqslant 2\ ) \quad ,$$

é uma representação de G sobre $\mathbb{C}$.

2. Quais dessas representações são triviais? Quais dessas representações são fiéis?

Exercício 3

Suponha que ρ é uma representação do grupo G. Se g e h são dois elementos de G tais que

$$\rho\,(g) \ * \ \rho\,(h) \ = \ \rho\,(h) \ * \ \rho\,(g) \quad ,$$

isso significa que $g \cdot h = h \cdot g$? Justifique.

Exercício 4

Considere as matrizes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

1. Mostre que $\mathcal{A} = \{ \ I, A, A^2 \ \}$ é uma representação fiel do grupo $G = C_3 = \{ \ a : a^3 = e \ \}$.

2. Suponha agora que existe um espaço vetorial bidimensional V definido sobre um corpo $\mathbb{C}$, onde uma das suas bases é $\mathcal{B} = \{ \ v_1, v_2 \ \}$. Considerando que essa base pode ser representada matricialmente por

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

encontre a multiplicação $g \cdot v$ que define V como um $\mathbb{C}G$-módulo, para todo $g \in G = C_3$.

3. De acordo com o resultado que você acabou de obter no item anterior, como você definiria a multiplicação deste mesmo $\mathbb{C}G$-módulo se, ao invés de $\mathcal{B} = \{ \ v_1, v_2 \ \}$, você trabalhasse com uma outra base $\mathcal{B}' = \{ \ u_1, u_2 \ \}$ de V, cujos elementos são tais que $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_1 + v_2$? (**Dica:** note que $g \cdot u_1 = g \cdot v_1$ e $g \cdot u_2 = g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2$.)

4. Uma vez que

$$u = T \cdot v \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

nos permite afirmar que T é a matriz que representa a transformação linear que nos leva da base $\mathcal{B} = \{ \ v_1, v_2 \ \}$ para a base $\mathcal{B}' = \{ \ u_1, u_2 \ \}$, calcule os conjuntos

(i) $\mathcal{A}' = \{ \ T^{-1}IT, T^{-1}AT, T^{-1}A^2T \ \}$ e

(ii) $\mathcal{A}'' = \{ \ TIT^{-1}, TAT^{-1}, TA^2T^{-1} \ \}$.

Algum desses conjuntos permite definir a mesma multiplicação $g \cdot u$ que você encontrou no item **3**? Por que você acha que isso acontece?