# Uma introdução aos grupos e representações

## Primeira lista de exercícios

### Exercício 1

Sabemos que

$$\langle\, a \,\rangle = \{\, a^m : m \in \mathbb{Z} \,\}$$

é um subgrupo de $G$ que é gerado usando apenas um dos seus elementos. Este subgrupo é cíclico e possui uma ordem finita caso exista um $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $a^k = e$.

**(a)** Usando a mesma linha de raciocínio que é usada para gerar $\langle\, a \,\rangle$, é possível afirmar que o subconjunto

$$\langle\, a, b \,\rangle = \{\, a^m \cdot b^n \in G : m, n \in \mathbb{Z} \,\}\ ,$$

de $G$, que é gerado usando apenas dois elementos $a$ e $b$, também é um subgrupo de $G$? Aliás, existe alguma propriedade especial que os elementos $a$ e $b$ devem satisfazer para que isso ocorra?

**(b)** Com base nas conclusões que você chegou para resolver o item anterior, mostre que

$$D_{2n} = \langle\, a, b\ : a^m = e\ ,\ b^2 = e\ ,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

é um subgrupo de $G$. Qual é a ordem deste grupo?

### Exercício 2

Sejam $G_1$ e $G_2$ dois grupos, e considere que

$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1 \ \text{ e } \ g_2 \in G_2\}$$

é um conjunto onde podemos definir uma multiplicação entre os seus elementos, a qual é definida por

$$(g_1, g_2) \cdot (g_1', g_2') = (g_1 \cdot g_1', g_2 \cdot g_2')\ .$$

**(a)** Mostre que $G_1 \times G_2$ é um grupo. Se $G_1$ e $G_2$ são dois grupos finitos, qual a ordem de $G_1 \times G_2$?

**(b)** Proceda analogamente ao item anterior e mostre que, se $G_1, \ldots, G_r$ são grupos, o conjunto

$$G_1 \times \ldots \times G_r = \{ (g_1, \ldots, g_r) : g_j \in G_j \text{ para } 1 \leqslant j \leqslant r \} ,$$

cujos elementos são tais que

$$(g_1, \ldots, g_r) \cdot (g_1', \ldots, g_r') = (g_1 \cdot g_1', \ldots, g_r \cdot g_r') ,$$

também é um grupo.

## Exercício 3

Considere que os elementos $e$, $a$, $b$, $c$, $d$ e $f$ formam um grupo, cujas regras de multiplicação estão dispostas na tabela abaixo as quais devem ser lidas da seguinte maneira: o elemento $a$ que multiplica outro pela esquerda $b$ consta na primeira coluna (por exemplo, $a \cdot b = d$).

| | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $f$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $d$ | $f$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $f$ | $e$ | $d$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $f$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $a$ | $b$ | $f$ | $e$ |
| $f$ | $f$ | $b$ | $c$ | $a$ | $e$ | $d$ |

De acordo com esta tabela:

**(a)** De acordo com esta tabela, qual é ordem de cada um dos elementos deste grupo? Quais são os subgrupos que este grupo admite?

**(b)** Entre os subgrupos que você encontrou existe algum de ordem quatro? Se não, qual o motivo disso não ter acontecido?

**(c)** Tomando apenas um dos subgrupos $H$ de ordem dois que você encontrou, calcule todos os possíveis conjuntos $gHg^{-1}$. De acordo com o resultado que você obteve, você diria que é possível construir uma relação um-pra-um entre os elementos desses conjuntos que você obteve e os elementos dos outros subgrupos de ordem dois que você não usou? Por que você acha que isso acontece?

**(d)** Quando você calcula todos os possíveis conjuntos $gH'g^{-1}$, agora considerando que $H'$ é um subgrupo de ordem três, qual o resultado que você obtém: um novo subgrupo de ordem três ou o mesmo $H'$? Por que você acha que isso acontece? Como esta nova situação se encaixa com a situação do item anterior?