4302212 – Física IV

Uma pequena observação sobre a ressonância

Desde ontem, algumas pessoas estão me fazendo duas perguntas: uma, sobre qual é a frequência onde a ressonância ocorre (se é em ω_0 mesmo ou numa outra, diferente); e outra pergunta, querendo saber se existe alguma relação entre a frequência do oscilador "forçado" e aquela

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}\,. \tag{1}$$

que modera a oscilação de um oscilador subcrítico. Então, pra responder essas duas perguntas direitinho, eu resolvi escrever esse texto aqui pra vocês.

E pra entender a resposta dessas perguntas, eu vou convidar vocês a olharem pra solução particular $x_{\mathrm{p}}(t)$ da equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\!\big(\omega' t\big)$$

de um oscilador que é forçado por uma força $F(t) = F_0\cos(\omega' t)$. Ou seja, eu convido vocês a olharem pra

$$x_{\mathrm{p}}(t) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - (\omega')^2\right]^2 + \gamma^2(\omega')^2}}\ \cos\left(\omega' t - \varphi\right)$$

Notem que, aqui, eu estou chamando a frequência dessa força de ω' de propósito, já que essa frequência tem uma origem diferente da ω que consta em (1): ou seja, ω' é a frequência de uma força externa, com a qual alguém resolveu "atormentar" um oscilador subcrítico que já tem a sua frequência ω. E uma coisa que a gente percebe, olhando pra essa $x_{\mathrm{p}}(t)$, é que ela possui uma amplitude

$$A\left(\omega'\right) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left[\omega_0^2 - (\omega')^2\right]^2 + \gamma^2(\omega')^2}}\,. \tag{2}$$

Trata-se de uma amplitude que está sendo interpretada como uma função matemática de ω' porque isso pode realmente ser feito: afinal de contas, essa amplitude pode ir mesmo variando a medida que alguém resolve ir variando essa ω'.

A grande vantagem de reconhecer que essa amplitude é uma função matemática de ω' é que, se a gente quiser saber qual é o valor de ω' que faz essa amplitude ser máxima (ou seja, o valor de ω' que coloca esse oscilador na sua condição de ressonância), basta a gente derivar essa função e encontrar o valor de ω' que torna essa primeira derivada nula. E derivando essa $A(\omega')$, a gente vê que

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\omega'} &= \frac{F_0}{m}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\left[\left[\omega_0^2-(\omega')^2\right]^2+\gamma^2(\omega')^2\right]^{3/2}}\right\}\left\{2\left[\omega_0^2-\left(\omega'\right)^2\right]\left(-2\omega'\right)+2\gamma^2\omega'\right\} \\
&= \frac{F_0}{m}\left\{\frac{2\omega'\left[\omega_0^2-(\omega')^2\right]-\gamma^2\omega'}{\left[\left[\omega_0^2-(\omega')^2\right]^2+\gamma^2(\omega')^2\right]^{3/2}}\right\} = \frac{\omega F_0}{m}\left\{\frac{2\left[\omega_0^2-(\omega')^2\right]-\gamma^2}{\left[\left[\omega_0^2-(\omega')^2\right]^2+\gamma^2(\omega')^2\right]^{3/2}}\right\}
\end{aligned}$$

Logo, como o denominador desse resultado nunca é nulo para um γ diferente de zero, a gente vê que essa derivada só será nula quando

$$2\left[\omega_0^2-\left(\omega'\right)^2\right]-\gamma^2=0 \;\Leftrightarrow\; 2\left[\omega_0^2-\left(\omega'\right)^2\right]=\gamma^2 \;.$$

Ou seja, quando

$$\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2}} \tag{3}$$

Notem que, no caso de um amortecimento fraco (ou seja, no caso de um amortecimento sub-crítico onde $\gamma \ll \omega_0$), temos

$$\omega'=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}\approx\omega_0 \;.$$

E esse é o caso mais comum, mais cotidiano mesmo, onde a gente reconhece a frequência de ressonância como a frequência natural de oscilação. Afinal de contas, o termo $\gamma^2(\omega')^2$, que aparece em (2), é pequeno o suficiente para tornar

$$A\left(\omega'\approx\omega_0\right)=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\underbrace{\left[\omega_0^2-\left(\omega'\right)^2\right]^2}_{\approx 0}+\underbrace{\gamma^2\left(\omega'\right)^2}_{\approx\gamma^2\omega_0^2}}}\approx\frac{F_0}{m}\frac{1}{\gamma\omega_0} \tag{4}$$

máximo, que é justamente o caso que estava sendo tratado em sala de aula.

No entanto, o que esse resultado (3) está deixando claro pra gente é que a amplitude máxima dessa oscilação forçada não ocorre em ω_0 nos casos que são mais gerais. Aliás, uma das maneiras que a gente tem pra verificar que a amplitude dessa oscilação tem o seu valor máximo mesmo em (3) é (i) derivar mais uma vez a função (2) em relação a ω' e (ii) verificar que esse resultado, nessa frequência dada por (3), é realmente menor que zero. Eu não vou fazer isso aqui. Mas uma coisa que eu vou fazer aqui, pra mostrar pra vocês uma coisa bem interessante, é substituir (3) em (2) pra ver quanto vale essa amplitude máxima. Substituindo vemos que

$$\begin{aligned} A\left(\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}\right) &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma^2}{2}\right)^2 + \gamma^2\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right)}} \\ &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^4}{2}\right) + \gamma^2\omega_0^2}} = \frac{F_0}{\gamma m}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \,. \end{aligned}$$

Ou seja, um resultado que traz à tona uma frequência no denominador dessa amplitude que é exatamente a mesma que já foi definida em (1): no caso, a mesma frequência ω de oscilação do oscilador amortecido não forçado. Isso faz com que a gente reconheça que a amplitude máxima dessa oscilação forçada, que é a grande caracterizadora desse fenômeno da ressonância, pode ser expressa como

$$A\left(\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}\right) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\gamma\omega} \tag{5}$$

Notem que esse último resultado não é absurdo por, pelo menos, três "diferentes" pontos de vista. Um deles é que as amplitudes (4) e (5) têm a mesma estrutura: ou seja, ela é sempre dada pela razão entre a aceleração F_0/m e um produto do fator de amortecimento com a frequência de oscilação do sistema. Já um segundo ponto de vista é que os resultados (4) e (5) levam exatamente ao mesmo valor da amplitude quando $\omega \approx \omega_0$. E um terceiro ponto de vista é que tanto (4) como (5) apontam para uma amplitude que tende ao infinito a medida que γ tende a zero.

De qualquer forma, uma coisa interessante que as amplitudes (4) e (5) deixam claro é que, numa situação hipotética onde a gente não sabe qual é o valor ω_0 que caracteriza a oscilação natural de um oscilador qualquer, uma das maneiras da gente obter esse valor experimentalmente é "perturbando" esse oscilador com uma força cujas magnitude F_0 e frequência ω' são controláveis. Assim, uma vez identificado o valor da frequência ω' que força o sistema a oscilar com na sua amplitude máxima, basta medir o tamanho dessa amplitude para descobrir, através de (5), esse valor desconhecido de ω_0.