4323102 – Física II

Terceira lista complementar de exercícios

1. Pelo ponto de vista matemático, podemos afirmar que uma onda unidimensional, que se propaga com uma velocidade cujo módulo é v, pode ser modelada por uma função $y\left(x,t\right)$ que satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = 0\ . \tag{1}$$

(a) Mostre que as funções $y_1\left(x,t\right) = f\left(x - vt\right)$ e $y_2\left(x,t\right) = g\left(x + vt\right)$ são duas soluções dessa equação (1), onde f e g são duas funções arbitrárias, porém deriváveis até segunda ordem em relação as suas variáveis x e t.

(b) Sabendo que os operadores de derivação de uma função $y\left(x,t\right)$ são tais que

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}y\left(x,t\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}y\left(x,t\right)\ ,$$

mostre que a equação (1) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)y\left(x,t\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)y\left(x,t\right) = 0 \tag{2}$$

(c) Mostre que a mesma função $y_1\left(x,t\right) = f\left(x - vt\right)$ que foi mencionada no item **(a)** é solução da equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)y\left(x,t\right) = 0\ , \tag{3}$$

do mesmo jeito que a mesma função $y_2\left(x,t\right) = g\left(x + vt\right)$, que também foi mencionada nesse mesmo item **(a)**, é solução da equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)y\left(x,t\right) = 0\ . \tag{4}$$

(d) Como o que você acabou de observar resolvendo o item **(c)** se conecta com o que você observou resolvendo o item **(a)**? Existe alguma relação entre o fato de $y_1\left(x,t\right) = f\left(x - vt\right)$ e $y_2\left(x,t\right) = g\left(x + vt\right)$ serem soluções das duas equações (3) e (4) com o fato dessas mesmas funções serem soluções da equação (1) e vice-versa? **Dica:** use o item **(b)** para te ajudar a responder isso.

2. **(a)** Sem fazer, apenas neste primeiro momento, qualquer julgamento de valor sobre o fato da função

$$y\,(x,t) = A\cos\left(kx - \omega t + \delta\right) \tag{5}$$

ser (ou não ser) solução da equação (1), é possível identificar essa função com uma das funções $y_1\,(x,t) = f\,(x - vt)$ ou $y_2\,(x,t) = g\,(x + vt)$ que foram mencionadas no **Exercício 1**? Se sim, qual precisa ser o valor de v para que essa indentificação ocorra?

(b) Substituindo essa função (5) na equação (1), qual precisa ser o valor de v que essa função seja, de fato, uma solução de (1)? Esse valor que você encontrou para v é o mesmo que você obteve no item **(a)**? Aqui, considere que A, k, ω e δ são constantes em relação às variáveis x e t.

(c) Levando em conta que $\cos\,(z) = \cos\,(z + 2n\pi)$, onde $n \in \mathbb{Z}$, encontre todos os intervalos de tempo T_n que caracterizam a periodicidade dessa onda. Ou seja, encontre todos os valores de T_n que nos permitem afirmar que $y\,(x,t) = y\,(x, t + T_n)$. Esses valores intervalos de tempo T_n também são tais que $n \in \mathbb{Z}$ ou existe alguma consideração física que exclui alguns valores de n?

(d) De acordo com o resultado que você acabou de obter no item **(c)**, é possível afirmar que ω pode continuar sendo interpretado como uma frequência angular do mesmo jeito que acontece no oscilador harmônico? Aliás, essa condição de periodicidade $y\,(x,t) = y\,(x, t + T_n)$ que você usou para resolver o item **(c)** nos permite interpretar essa onda como um oscilador harmônico de alguma maneira?

(e) Repita tudo o que você fez para resolver o item **(c)** só que, agora, em relação ao espaço. Ou seja, encontre todos os comprimentos λ_n que nos permitem afirmar que $y\,(x,t) = y\,(x + \lambda_n, t)$. De acordo com esse resultado que você acabou de obter, é possível afirmar que k também pode ser interpretado como algum tipo de frequência angular? Se sim, o que nos permite diferir essa nova frequência angular k da frequência angular ω? Quais são as unidades de medidas que estão associadas a k e ω?

(f) Quais são os valores de k e ω que seguem, do que você obteve nos itens **(c)** e **(e)**, quando $n = 1$? Use esses valores para reexpressar a velocidade v, que você no item **(b)**, em função do comprimento λ e do período T fundamentais dessa onda harmônica (5) (ou seja, em função de λ_n e T_n quando $n = 1$).

(g) De acordo com o resultado obtido no item **(f)**, é possível estabelecer alguma relação linear entre λ e T? Se sim, como essa relação corrobora com a pergunta que foi feita no item **(e)**, sobre o fato de ser possível interpretar k como um novo tipo de frequência angular, uma vez que a consequência dessa interpretação é a reinterpreção de λ como um novo tipo de período fundamental?

(h) Diante da relação que você obteve entre λ, T e v no item **(f)**, é possível afirmar que x é uma função de t? Se sim, isso implica que ω nunca pode assumir um valor nulo? Aliás, quais são (ou seriam) as características de uma onda harmônica com $\omega = 0$?

(i) As conclusões que você obteve no item **(h)** sugerem, de alguma maneira, que existe alguma coisa estranha com a condição de periodicidade $y\left(x,t\right) = y\left(x+\lambda_n,t\right)$ que você usou para resolver o item **(e)**? Por trás dessa condição existe alguma ideia implícita de congelamento do tempo?

3. Considere a situação de uma corda, cuja vibração pode ser caracterizada por uma onda

$$y\left(x,t\right) = A\cos\left(kx - \omega t + \delta\right) \tag{6}$$

conforme sugere a Figura 1, onde está destacado um elemento da corda que possui uma massa Δm.

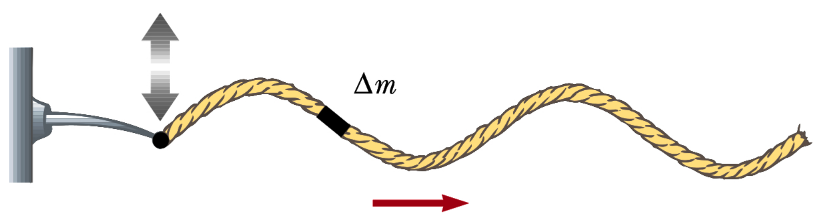

Figura 1

(a) Assumindo que essa corda possui uma densidade uniforme μ que é tal que a massa de um elemento infinesimal pode ser expressa como $dm = \mu dx$, encontre a quantidade infinitesimal $d\mathcal{K}$ que caracteriza a energia cinética desse elemento em função de dx. Diante desse resultado que você acabou de obter, qual é o valor da derivada $d\mathcal{K}/dx$? Aliás, qual é valor médio

$$\overline{\frac{d\mathcal{K}}{dx}} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{d\mathcal{K}}{dx}\,dx\ ,$$

dessa derivada? Aqui, λ corresponde ao comprimento dessa onda.

(b) Uma vez que o movimento desse elemento infinitesimal da corda pode ser reconhecido como o de um oscilador harmônico na direção y, qual é a densidade média

$$\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dx}} = \overline{\frac{d\mathcal{K}}{dx}} + \overline{\frac{d\mathcal{U}}{dx}}$$

da energia total que está associada a essa onda? Aqui, $\mathcal{U}$ corresponde a energia potencial que caracteriza esse oscilador harmônico.

(c) Notando que a potência média que é transportada por essa corda é tal que

$$\bar{P} = \overline{\frac{d\mathcal{E}}{dt}} = \overline{\frac{d\mathcal{E}}{dx}}\frac{dx}{dt} \ ,$$

encontre o valor da intensidade I dessa onda (6) e mostre que, assim como ocorre no caso de um oscilador harmônico, essa intensidade também é proporcional ao quadrado da amplitude.

4. O objetivo deste exercício é funcionar como uma espécie de tutorial matemático que nos ajuda a entender um fato de que não costuma ser algebricamente justificado nos livros: que, se

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta) \tag{7}$$

são duas soluções da equação (1), a sua soma $y = y_1 + y_2$, além de também ser uma solução desta mesma equação, pode ser expressa como

$$y(x,t) = \mathcal{A} \cos(kx - \omega t + \delta_{12}) \ , \tag{8}$$

desde que

$$\mathcal{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta_{12} \ , \ \text{ onde } \ \delta_{12} = \delta_2 - \delta_1 \ . \tag{9}$$

(a) Sabendo que

$$\cos(a \pm b) = (\cos a)(\cos b) \mp (\sin a)(\sin b) \ ,$$

assuma que $a = kx - \omega t$ e desenvolva as funções que aparecem em (7) usando essa igualdade.

(b) Some as expressões que você obteve para y_1 e y_2 no item anterior, e escreva essa soma como

$$\text{“alguma coisa”} \cdot \cos(kx - \omega t) + \text{“alguma outra coisa”} \cdot \sin(kx - \omega t) \ .$$

(c) Faça o mesmo desenvolvimento que você fez no item **(a)** só que, agora, para a função que foi dada em (8).

(d) Iguale os resultados que você obteve no itens **(b)** e **(c)**, e mostre que, para que essa soma, entre y_1 e y_2, ser, de fato, igual a y, precisamos ter

$$\cos\delta_{12} = \frac{A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2}{\mathcal{A}} \quad \text{e} \quad \sin\delta_{12} = \frac{A_1 \sin\delta_1 + A_2 \sin\delta_2}{\mathcal{A}} \ .$$

(e) Levando em conta que $\sin^2\delta_{12} + \cos^2\delta_{12} = 1$, prove a validade da condição (9).

(f) Aliás, de acordo com essa condição (9), é possível afirmar que $\mathcal{A}$ admite algum valor que é máximo ou mínimo? Se sim, para que valores de δ_{12} isso ocorre?

5. Outra superposição de interesse ao contexto das ondas é aquela que segue da superposição de duas ondas harmônicas

$$y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t) \ , \tag{10}$$

onde as diferenças $\Delta k = k_1 - k_2$ e $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ são extremamente pequenas quando comparadas aos valores médios dos números de onda e das frequências. Ou seja, a superposição entre duas ondas tais que

$$\Delta k \ll \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{e} \quad \Delta\omega \ll \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \ . \tag{11}$$

(a) Mostre que essa diferença $\Delta k = k_1 - k_2$ pode ser obtida considerando que

$$k_1 = \bar{k} + \frac{\Delta k}{2} \quad \text{e} \quad k_2 = \bar{k} - \frac{\Delta k}{2} \ . \tag{12}$$

Faça o mesmo em relação à diferença $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, mostrando que ela também pode ser obtida considerando que

$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2} \ . \tag{13}$$

(b) Substitua esses valores que foram fornecidos em (12) e (13) nas expressões das duas ondas harmônicas que constam em (10), e desenvolva os resultados obtidos dessas substituições a luz de

$$\cos(a \pm b) = (\cos a)(\cos b) \mp (\sin a)(\sin b) \ ,$$

(c) Usando os resultados que você obteve no item **(b)**, mostre que

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = a(x,t)\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right) \ , \tag{14}$$

onde

$$a(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \tag{15}$$

é a função que descreve o comportamento da amplitude dessa onda superposta.

(d) Do mesmo jeito que foi possível identificar a onda harmônica (5) do **Exercício 2** em termos de uma das funções $y_1(x,t) = f(x - vt)$ ou $y_2(x,t) = g(x + vt)$ que foram mencionadas no **Exercício 1**, faça o mesmo em relação a (14). A velocidade v que te permite identificar (14) nestes termos é única?

(e) Uma conclusão que segue, de um confronto deste exercício com o **Exercício 4**, é que ambos descrevem a mesma situação física quando

$$\delta_1 = \delta_2 = 0 \ , \quad A_1 = A_2 = A \ , \quad k_1 = k_2 = k \quad \text{e} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \ . \tag{16}$$

Mostre que, nesta situação, a superposição (14) se reduz a

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos(kx - \omega t) \ . \tag{17}$$

(f) De acordo com o resultado obtido no item **(e)**, a identificação de (17) nos mesmos termos do item **(d)** leva a uma velocidade v que é única. Encontre o valor dessa velocidade e mostre que ela pode ser identificada com a velocidade dessa propagação da onda (17).

(g) Diante do resultado que você acabou de obter no item **(f)**, você acha que é possível afirmar que a velocidade de propagação de uma onda (14) nos casos mais gerais (ou seja, naqueles casos onde as condições que constam em (16) não são necessariamente válidas) sempre pode ser identificada com a velocidade da fase $\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$? Justifique a sua resposta.

6. Esse quinto exercício é bastante enfadonho em relação aos cálculos. Porém, como todos esses cálculos pode nos ajudar a entender melhor toda essa discussão que começou a ser feita no final do **Exercício 5**, sobre as velocidades que estão associadas a onda harmônica (14), ele será apresentado aqui como uma espécie de tutorial matemático, assim como já aconteceu com o **Exercício 4**.

(a) Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

da função $y(x,t)$ que descreve a onda harmônica dada em (14).

(b) Substitua o resultado que você obtive em **(a)** na equação da onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = 0 \; .$$

(c) Considerando que os produtos

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right)$$

não são identicamente nulos, mostre que a $y(x,t)$ dada em (14) só será solução dessa equação da onda se

$$\bar{k}\Delta k = \frac{1}{v^2}\,\bar{\omega}\Delta\omega \quad \text{e} \quad \bar{k}^2 + \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 = \frac{1}{v^2}\left[\bar{\omega}^2 + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2\right] \; . \tag{18}$$

(d) Mostre que, ao considerarmos

$$v_\varphi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \quad \text{e} \quad v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \; , \tag{19}$$

essas duas condições que constam em (18) equivalem respectivamente a

$$v^2 = v_\varphi v_g \quad \text{e} \quad v^2 = \frac{v_\varphi^2 \bar{k}^2 + v_g^2 \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2}{\bar{k}^2 + \left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2} \ . \tag{20}$$

(e) Confrontando o resultado que você acabou de obter neste item **(d)** com o resultado que você obteve no item **(d)** do **Exercício 5**, é possível identificar essas velocidades v_φ e v_g com as respectivas velocidades que descrevem a fase $\varphi(x,t) = \bar{k}x - \bar{\omega}t$ e o grupo $g(x,t) = (\Delta k/2)\,x - (\Delta\omega/2)\,t$ da onda harmônica superposta (14)? Se sim, você diria que as duas condições que constam em (20) indicam que a velocidade v de uma onda (14) é sempre aquela em que a média geométrica das velocidades de fase e de grupo equivale a uma média ponderada?

(f) Usando ou a condição (18) ou a condição (20), mostre que, quando $v_\varphi = v$, temos necessariamente $v_g = v$.

7. Sejam duas ondas harmônicas unidimensionais

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \delta) \tag{21}$$

que, embora sejam caracterizadas pelos mesmos valores de A, k, ω e δ, se propagam em sentidos diferentes.

(a) Usando novamente o fato de que

$$\cos(a \pm b) = (\cos a)(\cos b) \mp (\sin a)(\sin b) \ ,$$

desenvolva as duas funções que aparecem em (21) e mostre que

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \mathcal{A}(x)\cos(\omega t) \ , \tag{22}$$

onde $\mathcal{A}(x) = 2A\cos(kx)$.

(b) De acordo com essa expressão (22), é possível afirmar que o resultado da superposição dessas das ondas harmônicas (21) é uma onda estacionária? Por quê?

8. Considere que a onda que caracteriza o comportamento de uma corda vibrante, que possui comprimento L, é dada por

$$y\left(x,t\right)=\mathcal{A}\left(x\right)\cos\left(\omega t\right)\ . \tag{23}$$

(a) Como essa função (23), por ser caracterizada por uma onda, satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t}=0\ ,$$

prove que essa satisfação é equivalente a afirmação de que a amplitude $\mathcal{A}\left(x\right)$ de (23) satisfaz a equação

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{dx^2}-k^2 A=0\ . \tag{24}$$

(b) Mostre que

$$\mathcal{A}\left(x\right)=a\cos\left(kx\right)+b\sin\left(kx\right) \tag{25}$$

é uma possível solução de (24), onde a e b são duas constantes.

(c) Suponha que essa corda, de comprimento L, está presa em ambas as extremidades. Como essa suposição é equivalente a afirmação de que a amplitude $\mathcal{A}\left(x\right)$ precisa ser tal que

$$\mathcal{A}\left(0\right)=\mathcal{A}\left(L\right)=0\ ,$$

qual precisa ser os valores das constantes a e b para que (25) consiga atender, por exemplo, a condição $\mathcal{A}\left(0\right)=0$?

(d) De acordo com os valores que você encontrou no item **(c)**, mostre que a condição $\mathcal{A}\left(L\right)=0$ só é atendida quando $kL=\pi n$, onde $n\in\mathbb{N}$. Ou seja, mostre que os diversos números de onda que fazem com que (25) descreva uma corda que vibra presa por ambas as extremidades são dados por

$$k_n=\frac{n\pi}{L}\ . \tag{26}$$

(e) Levando em conta que a velocidade de propagação da onda numa corda é dada por $\sqrt{F_T/\mu}$, onde F_T corresponde ao módulo da força de tensão e μ é a densidade de massa dessa corda, obtenha, usando o resultado (26), os n valores das frequências ω_n e $f_n=\omega_n/2\pi$ a vibração dessa corda.

9. **(a)** Refaça o **Exercício 8** considerando, agora, que essa mesma corda, de comprimento L, está presa apenas numa das extremidades. Neste caso, qual é a expressão de $\mathcal{A}(x)$ que satisfaz essa nova condição? Quais são os diversos valores que o número de onda assume nesta vibração?

(b) Responda as mesmas questões que você respondeu no item **(a)** considerando, agora, que essa corda está livre em ambas as extremidades.

10. **(a)** Explique, com as suas palavras, como se dá o processo de criação do som com base na compressão e descompressão de um fluido. Esse processo consegue descrever adequadamente a criação de um som num instrumento musical de sopro? E num instrumento musical de corda?

(b) Qual o significado de uma onda de deslocamento e de uma onda de pressão neste caso sonoro? Qual a relação que existe entre essas duas ondas?

(c) Como o som pode ser tratado ondulatoriamente, é válido afirmar que todas as observações que fizemos nos exercícios anteriores também valem para ele? Justifique a sua resposta.

11. Sabendo que a velocidade do som num meio, que possui uma densidade volumétrica ρ_0 e uma elasticidade volumétrica com modulo igual a B, é dada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \, ,$$

calcule a velocidade do som:

(a) na água em $T \approx 0^\circ$ C, onde $\rho_0 \approx 1,00 \times 10^3$ kg/m^3 e $B \approx 2,1 \times 10^9$ N/m^2; e

(b) no mercúrio a temperatura ambiente, onde $\rho_0 \approx 13.600$ kg/m^3 e $B \approx 2,80 \times 10^{10}$ N/m^2.

12. Suponha que uma onda de compressão inicia-se numa barra de ferro, com uma frequência $f = 250s^{-1}$, e é comunicada desta barra ao ar. Considerando que, na barra, a velocidade desta onda é $v_b = 1,6 \times 10^4$ cm/s enquanto, no ar, ela propaga-se a $v_a = 1,1 \times 10^3$ cm/s, encontre o comprimento de onda em cada um dos meios.

13. Sabemos que, em condições normais de temperatura e pressão, por exemplo, a velocidade de uma onda de compressão propagando-se no ar é $v = 330$ m/s. Desta maneira, admitindo que a densidade do ar é $\rho = 1,29\ \mathrm{kg/m^3}$, se tivermos uma fonte puntual que opera com uma frequência de $600\ \mathrm{s^{-1}}$ e que irradia energia de maneira uniforme, em todas as direções, com uma taxa de $5\ \mathrm{W}$:

(a) Qual a intensidade da onda sentida por um observador posto a $20\ \mathrm{m}$ da fonte?

(b) Aliás, qual é a amplitude da onda relacionada a esta mesma posição?

14. Explique, com as suas palavras, como é possível reeexpressar qualquer intensidade sonora em termos da unidade decibel (dB). Aliás, você consegue apontar alguma vantagem prática nessa reexpressão quando comparada àquela que segue em termos da unidade $\mathrm{W/m^2}$?