4323102 – Física II

Segunda lista complementar de exercícios

1. Seja um oscilador harmônico amortecido unidimensional, livre de forças externas, que é descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \; . \tag{1}$$

Aqui, $\omega_0^2 = k/m$ é o quadrado da frequência natural desse oscilador e tanto $\gamma = \rho/m$ como ρ (ambos positivos) podem ser considerados como parâmetros desse amortecimento.

(a) Substitua a função $x(t) = e^{rt}$ na equação (1) e encontre qual é a equação segundo grau que r deve obedecer para tornar essa função solução de (1).

(b) Mostre que as raízes dessa equação que você obteve no item anterior são

$$r_1 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad \text{e} \quad r_2 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{2}$$

2. De acordo com o **Exercício 1**, mais especificamente com as raízes apontadas em (2), uma situação que vale a pena ser analisada é aquela onde $\gamma/2 > \omega_0$.

(a) Mostre que, neste caso, $x_1(t) = e^{r_1 t}$ e $x_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções da equação (1) e que, consequentemente,

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{3}$$

também é. Aqui, A_1 e A_2 são duas constantes que podem ser determinadas de acordo com as condições iniciais do problema.

(b) Considerando que as condições iniciais desse problema de oscilação são

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad v(0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

obtenha quais precisam ser os valores das constantes A_1 e A_2 que foram mencionadas no item **(a)** e mostre que, neste caso, (3) se reduz a

$$x(t) = x_0 \left(\frac{r_2}{r_2 - r_1}\, e^{r_1 t} - \frac{r_1}{r_2 - r_1}\, e^{r_2 t} \right) \; . \tag{4}$$

3. Novamente de acordo com o **Exercício 1**, mais especificamente com as raízes que foram apontadas em (2), outra situação que vale a pena ser analisada é aquela onde $\gamma/2 = \omega_0$. Afinal de contas, muito embora este caso pareça apontar apenas para $x_1(t) = e^{-\omega_0 t}$ como a única solução da equação diferencial (1) já que

$$r_1 = r_2 = -\frac{\gamma}{2} \,, \tag{5}$$

uma outra solução que (1) também admite é $x_2(t) = te^{-\gamma t/2}$.

(a) Mostre que, neste caso, $x_1(t) = e^{-\gamma t/2}$ e $x_2(t) = te^{-\gamma t/2}$ são soluções da equação (1).

(b) Como a mostração do item anterior implica que

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t/2} + A_2 t e^{-\gamma t/2} = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\gamma t/2} \tag{6}$$

também é uma solução da equação (1), determine quais precisam ser os valores das constantes A_1 e A_2 quando as condições iniciais desse problema de oscilação são

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad v(0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

4. De acordo com os resultados que você obteve nos **Exercício 2** e **Exercício 3**, é possível afirmar (seja pelos pontos de vista físico ou matemático) que esses dois osciladores que foram analisados, onde $\gamma/2 \geqslant \omega_0$, realmente retratam sistemas que estão em oscilação? Por quê?

5. **(a)** Mostre que toda função

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) \,, \tag{7}$$

onde A_1 e A_2 são constantes, pode ser reescrita como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \,, \tag{8}$$

onde A e ϕ também são duas constantes.

Dica: Para reescrever a função (7) do jeito que consta em (8), leve em conta que

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$.

(b) Existe alguma interpretação geométrica por trás da resolução do item anterior? Justifique a sua resposta.

(c) Considerando que a função (7) descreve um movimento qualquer cujas condições iniciais são

$$x(0) = x_0 \quad \text{e} \quad v(0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 \,, \tag{9}$$

determine os valores de A_1 e A_2 em função de x_0 e v_0.

(d) Refaça o item **(c)** considerando, agora, a função (8). Ou seja, determine quais são os valores de A e ϕ em função dos valores x_0 e v_0 que definem as condições iniciais (9).

(e) Usando os resultados que você obteve nos itens **(c)** e **(d)**, mostre que as funções (7) e (8) descrevem, de fato, a mesma situação física.

6. Mais uma vez de acordo com o **Exercício 1**, mais especificamente com as raízes que foram apontadas em (2), outra situação que vale a pena ser analisada é aquela onde $\gamma/2 < \omega_0$. Neste caso, essas raízes são

$$r_1 = -\frac{\gamma}{2} - i\omega \quad \text{e} \quad r_2 = -\frac{\gamma}{2} + i\omega \,, \quad \text{onde} \;\; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

(a) Levando em conta que $e^{\pm is} = \cos(s) \pm i\sin(s)$, onde s é um número real qualquer, mostre que

$$x_1(t) = e^{-\gamma t/2}\left[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right] \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{-\gamma t/2}\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]$$

são soluções da equação (1).

(b) Como a mostração do item anterior implica que a combinação

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma t/2}\left[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right] + A_2 e^{-\gamma t/2}\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]$$

também é uma solução da equação (1), onde A_1 e A_2 são constantes, manipule essa combinação e mostre que ela pode ser reescrita como

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\left[A_1' \cos(\omega t) + A_2' \sin(\omega t)\right] \,, \tag{10}$$

onde A_1' e A_2' são novas constantes.

(c) Usando o resultado previamente obtido no item **(a)** do **Exercício 5**, mostre que (10) pode ser reescrita como

$$x\left(t\right) = Ae^{-\gamma t/2}\cos\left(\omega t + \phi\right)\ , \tag{11}$$

onde A e ϕ são duas constantes.