4323102 – Física II

Primeira lista complementar de exercícios

1. Considere um pêndulo simples: ou seja, um sistema físico que é composto por um objeto de massa m e por um fio inextensível de comprimento L, como o que consta na Figura 1 abaixo. Supondo que as únicas forças que agem sobre o objeto são a peso $\vec{P}$ e a de tração $\vec{T}$, algo que

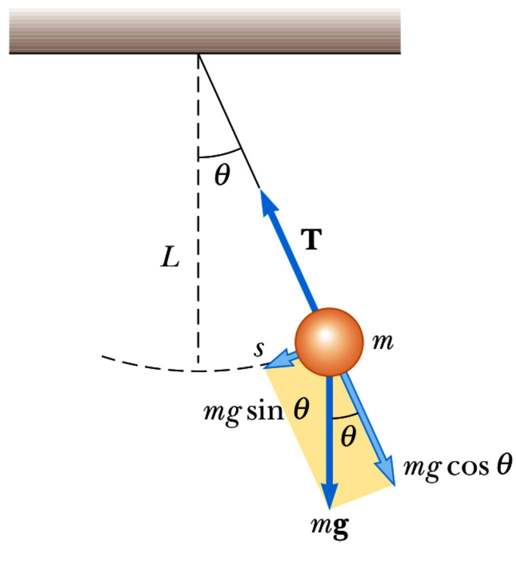

Figura 1

não é difícil é concluir que a equação que descreve o seu movimento é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta\ . \tag{1}$$

Aqui, g é o módulo da aceleração da gravidade e $\theta : [0, \infty] \leftarrow \mathbb{R}$ é a função que descreve o comportamento do ângulo, que existe entre o fio e qualquer um dos vetores do campo gravitacional, durante a movimentação do objeto.

Assumindo que $\omega^2 = g/L$ e analisando uma situação onde esse pêndulo executa pequenas oscilações, as quais nos permitem tomar $\sin\theta \approx \theta$,

(a) Quais são os possíveis valores de r que fazem com que $\theta_r(t) = e^{rt}$ seja uma solução da equação (1)? Para responder essa pergunta, substitua $\theta_r(t)$ em (1) e resolva a equação do segundo grau que você obteve para essa variável r.

(b) Diante dos resultados r_1 e r_2 que você obteve no item anterior, mostre que

$$\theta_r(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$$

também é uma solução de (1). Aqui, considere que a e b são duas constantes arbitrárias.

(c) Tendo em vista que $e^{\pm ist} = \cos(st) \pm i\sin(st)$, mostre que

$$\theta_1(t) = \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad \theta_2(t) = \sin(\omega t)$$

também são soluções de (1), assim como

$$\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\ .$$

Aqui, considere que A e B são duas constantes.

(d) Usando o fato que as funções seno e cosseno são tais que

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi n) \ \text{e}\ \cos(x) = \cos(x + 2\pi n)\ ,$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, use este fato para provar que os períodos associados às oscilações do pêndulo são dados por

$$T_n = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi n\sqrt{\frac{L}{g}}\ .$$

No caso, $T = T_1$ é o período fundamental do pêndulo simples.

2. Seja um sistema massa-mola, composto por um objeto de massa m preso na extremidade de uma mola fixa, caracterizada por uma constante elástica k, como o que consta na Figura 2. Desconsiderando quaisquer fatores dissipativos de energia, também não é difícil ver que as oscilações desse sistema obedecerão a relação

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x\ , \quad \text{com}\ \omega^2 = k/m\ , \tag{2}$$

onde $x : [0, \infty] \leftarrow \mathbb{R}$ é uma função que modela a trajetória do sistema.

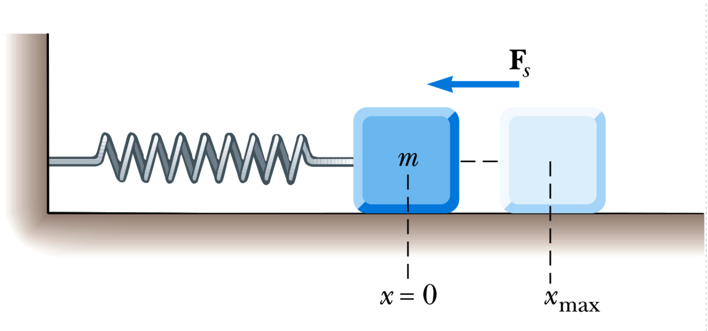

Figura 2

Sabendo que, analogamente ao que foi feito no **Exercício 1**, podemos mostrar que $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ é uma possível solução da equação (2),

(a) É válido afirmar que $x_2(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ também é uma possível solução de (2), se ϕ for uma constante? Por quê?

(b) Esboce os gráficos de $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e aponte qual é a diferença entre eles. No caso de ϕ ser um multiplo natural de 2π, existirá alguma diferença entre esses gráficos? Justifique a sua resposta.

(c) Uma vez que o período

$$T_n = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi n\sqrt{\frac{k}{m}}\ , \quad \text{com } n \in \mathbb{N}\ , \tag{3}$$

associado a esse sistema massa-mola mede o tempo que o objeto leva para retornar, por exemplo, à sua posição inicial, calcule as frequências f_n com que este retorno ocorre.

(d) Lembrando que ω também pode ser entendida como uma frequência, só que angular, qual é o relacionamento que existe entre ω e f_n? Explique como você chegou a essa conclusão?

3. Tomando o mesmo sistema massa-mola do **Exercício 2**, para o qual, por exemplo, as energias cinética e potencial são dadas respectivamente por

$$E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) \quad \text{e} \quad E_P(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)\ ,$$

(a) Obtenha a função que descreve a energia total $E_T(t)$ desse sistema físico, e esboce os gráficos de todas essas energias.

(b) Como você resolveu o item anterior? Existe alguma diferença entre os resultados obtidos se considerarmos, como solução da equação (2), $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ ou $x_2(t) = A\cos(\omega t + \phi)$? Por quê?

(c) Quais são os valores máximos e mínimos que podem ser alcançados pelas energias cinética e potencial? É possível afirmar que, além do objeto massivo oscilar, a forma da energia do sistema também oscila? Por quê?

4. Pelo ponto de vista matemático, resolver univocamente uma equação como a (2) significa obter a única solução que a satisfaz. E essa univocidade está diretamente envolvida com o fato dessa única solução ser a única que atende às condições iniciais do problema que se procura resolver.

Como bem vimos, principalmente dos dois últimos exercícios, funções gerais como a

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \ , \tag{4}$$

onde A e ϕ são duas constantes arbitrárias, são possíveis soluções da equação (2). Porém, devido a toda essa arbitrariedade que está relacionada a A e ϕ, uma função como essa (4) não pode ser considerada como unívoca: para que ela seja unívoca, tanto A e ϕ não podem ser constante arbitrárias; ou seja, essas constantes precisam ter valores bastante específicos.

(a) Como o propósito de (4) é modelar o comportamento de um objeto que oscila, calcule as funções

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \ , \tag{5}$$

que correspondem às velocidade e aceleração desse objeto respectivamente.

(b) Diante do resultado que você obteve no item anterior, obtenha as condições iniciais $x_0 = x(0)$ e $v_0 = v(0)$ em função das constantes A e ϕ.

(c) Como o resultado que você obteve no item **(b)** pode ser reinterpretado como um sistema de equações que te permite descobrir quais são os valores A e ϕ em função de x_0 e v_0, encontre quais são esses valores A e ϕ em função de x_0 e v_0, e explique o significado físico desse resultado.

5. Considere que

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

corresponde à solução de um sistema massa-mola cuja posição de equilíbrio é $x = 0$. De acordo com o que você aprendeu resolvendo o **Exercício 4**,

(a) Se você considerar também que a posição inicial deste sistema é $x_0 = A$, qual precisa ser o valor de ϕ que se ajusta a essa condição inicial?

(b) De acordo com o resultado obtido no item anterior, quanto vale $v_0 = v(0)$? Qual é o valor que energia cinética assume inicialmente?

(c) Aliás, quanto vale $a_0 = a(0)$? Esse resultado é condizente com o que você obteria levando em conta que a força de restituição da mola é dada por $F(x) = -kx$?

(d) E, se ao invés de $x_0 = A$, a condição inicial desse mesmo sistema, que oscila com amplitude A, fosse $x_0 = 0$: qual seria o valor de ϕ que se ajustaria a essa condição inicial? Esse novo valor de ϕ seria único? Por quê?

(e) Resolva novamente os itens **(b)** e **(c)**, só que agora considerando esse(s) novo(s) valor(es) que você obteve para ϕ no item **(d)**?

6. Considere que uma partícula possui massa m e realiza um movimento circular uniforme sobre um plano, no sentido anti-horário, com uma velocidade angular ω constante, igual a $8\ \mathrm{rad/s}$. Admitindo que é possível parametrizar esse plano pelas coordenadas (x, y) e que o raio da trajetória que essa partícula descreve, ao redor da origem desse plano, é $R = 3\ \mathrm{m}$,

(a) Obtenha as duas funções $x(t)$ e $y(t)$ que melhor descrevem as coordenadas desse movimento circular uniforme, sabendo que, no instante inicial, a partícula está no ponto $(x_0, y_0) = (2, 0)\ \mathrm{m}$.

(b) Os resultados que você obteve no item anterior podem ser analisados à luz de uma oscilação harmônica simples? Por quê?

7. Considere a situação onde um corpo rígido está suspenso por uma haste inextensível que o permite girar, como aquela que está ilustrada na Figura 3.

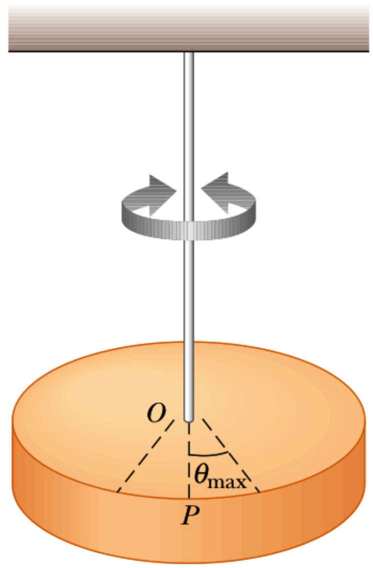

Figura 3

(a) Levando em conta que, quando esse corpo rígido é girado por um ângulo θ, o torque restaurador que age sobre ele é dado por $\tau = -\kappa\theta$, mostre que a equação diferencial que caracteriza essa oscilação é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\,\theta\,. \tag{6}$$

Aqui, κ é uma constante que caracteriza a capacidade restaurativa da haste e I é o momento de inércia do objeto nesta situação de giro.

(b) Quais são as frequências ω e f_n relacionadas a esse pêndulo de torção? Quais são os períodos T_n que o caracteriza?

8. Seja um objeto arbitrário, que pode ser interpretado como um corpo rígido de massa m, o qual conseguimos fixar um único ponto O, conforme ilustra a Figura 4. Uma das características desse objeto é que a linha, que une O ao seu centro de massa C, pode ser interpretada como uma espécie de linha de equilíbrio: ou seja, numa situação onde essa linha $\overleftrightarrow{OC}$ é paralela ao campo gravitacional, não existe nenhum torque agindo sobre esse corpo devido à força gravitacional.

(a) Considerando o caso onde o ângulo θ, que existe entre $\overleftrightarrow{OC}$ e qualquer linha do campo gravitacional, é não nulo, calcule o torque sobre o ponto C que é devido ao campo gravitacional.

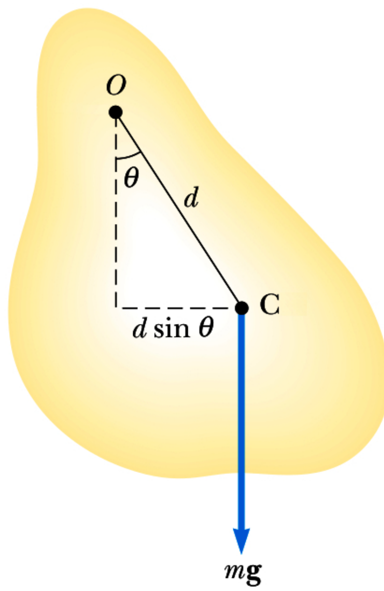

Figura 4

(b) Levando em conta que o torque que age sobre o ponto de um corpo rigído pode ser dado em termos do momento de inércia I desse corpo e da aceleração angular que esse torque produz, obtenha a equação diferencial que caracteriza esse objeto como um oscilador harmônico.

(c) A equação que você obteve no item anterior é similar àquela (1) que descreve um pêndulo simples? Se sim, obtenha qual seria o comprimento L do pêndulo simples que equivaleria a esse pêndulo físico. Se não, explique o porquê dessa similaridade não ocorrer.

(d) Se você respondeu "sim" no item anterior, o comprimento L que você obteve te permite fazer uma estimativa do momento de inércia I desse pêndulo físico? Se sim, expresse I em termos de L e obtenha quanto vale o raio de giração K desse pêndulo simples. No caso, esse raio de giração é aquele permite expressar I como $I = mK^2$.

(e) Quais são as frequências ω e f_n relacionadas a esse pêndulo físico? Quais são os períodos T_n que o caracteriza?

(f) Diante do resultado que você obteve para os períodos, obtenha o valor do período fundamental de um objeto mais específico: o saibro de massa M que consta na Figura 5, que pode ser identificado como um paralelepípedo de comprimento L.

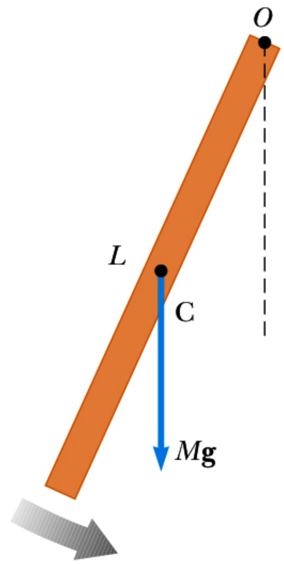

Figura 5

9. Seja um sistema formado por duas partículas de massas m_1 e m_2, as quais estão presas entre si por uma única mola de constante elástica k e que são livres para se movimentarem (oscilarem) numa única dimensão. Se nenhuma força age sobre o sistema ao longo da direção que caracteriza essa dimensão, essas duas partículas mantém uma distância de equilíbrio $x_2(t) - x_1(t) = l$ entre si ao longo de todo o tempo. Aqui, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ correspondem às posições assumidas pelas partículas de massas m_1 e m_2 respectivamente. Já numa situação contrária a essa, onde forças F_1 e F_2 agem sobre essas duas partículas, a deformação total sofrida pela mola pode ser modelada por uma única função, que é

$$x(t) = [x_2(t) - x_1(t)] - l\ . \tag{7}$$

Note que isso faz sentido uma vez que, nos instantes t onde $x(t) = 0$ (ou seja, nos instantes onde não há deformação na mola), a distância entre essas partículas é igual a l.

Uma das vantagens que essa nova parametrização x também oferece à análise deste problema de oscilação de duas partículas é o fato de que as forças que agem sobre tais partículas poderem ser expressas como $F_1 = kx = -F_2$. Ou seja, uma reparametrização que é compatível com o fato de que

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) \tag{8}$$

são as duas equações diferenciais que regem a dinâmica dessas duas partículas.

(a) Multiplique as primeira e segunda equações que constam em (8) por m_2 e m_1 respectivamente, subtraia um resultado do outro e mostre que

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \ , \text{ onde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{9}$$

(b) Qual o significado físico de μ? Qual o significado da razão k/μ? Como esses dois significados corroboram com a reinterpretação do problema da oscilação de duas partículas numa mesma direção como a oscilação de uma única partícula?

(c) Levando em conta que o problema que estamos analisando envolve duas partículas que oscilam, para as quais é possível definir um centro de massa $X(t)$ deste sistema como

$$X(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, x_1(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, x_2(t) \ , \tag{10}$$

mostre que, numa parametrização que adota o centro de massa desse sistema como a origem, a velocidade dessas partículas em relação a esse centro de massa é

$$v_1'(t) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad v_2'(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{dx}{dt} \ . \tag{11}$$

(d) Use as velocidades em (11) para obter a energia cinética dessas partículas em relação ao centro de massa. Essa energia cinética que você obteve pode ser expressa em termos de μ? Isso corrobora com a reinterpretação do problema da oscilação de duas partículas numa mesma direção como a oscilação de uma única partícula?

10. Considere a situação de uma molécula diatômica, para a qual a energia potencial de interação entre os seus dois átomos pode ser dada como

$$U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{12}\right] \ , \tag{12}$$

cujo gráfico consta na Figura 6. Aqui, r é o parâmetro que modela a distância que existe entre

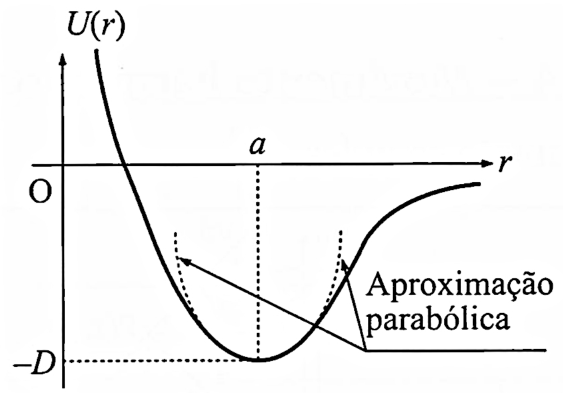

Figura 6

esses átomos e a é a distância de equilíbrio entre eles, a qual nos permite reconhecer $D = -U(r)$ como a energia de dissociação dessa molécula. Como essa função $U(r)$ é contínua e infinitamente diferenciável em $r = a$, algo que podemos calcular para essa função é a sua série de Taylor, dada por

$$U(r) = U(a) + \left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=a} (r-a) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=a} (r-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left.\frac{d^nU}{dr^n}\right|_{r=a} (r-a)^n \ .$$

Trata-se de uma expressão bastante interessante, uma vez que, para distâncias tais que $|r-a| \ll 1$, ela nos permite obter uma boa aproximação de $U(r)$ em termos de um polinômio de grau 1 ou 2.

(a) Calcule

$$\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=a} \quad \text{e} \quad \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=a} .$$

(b) Usando os resultados que você obteve no item anterior, expresse aproximação

$$U(r) \approx U(a) + \left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=a} (r-a) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=a} (r-a)^2$$

em termos de a e D.

(c) Considerando que $x = r - a$, você diria que o resultado que você obteve no **(b)** permite reconhecer, ao menos neste limite de pequenas distâncias, esse sistema de dois átomos nos mesmos moldes do **Exercício 9**? Se sim, faça uma estimativa para a constante elástica k que está associada ao problema desses dois átomos em termos de a e D, levando em conta que a energia potencial das duas partículas do **Exercício 9** é dada por

$$U\left(x\right)=\frac{1}{2}\mu x^{2}\ .$$

11. Levando em conta que $e^{\pm iz}=\cos z\pm i\sin z$, onde z é um parâmetro real,

(a) Calcule

$$\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\quad \text{e}\quad \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

em termos de exponenciais e prove que

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ .$$

(b) Use o resultado que você obteve no item anterior para provar que, se

$$x_{1}\left(t\right)=A\cos\left(\omega_{1}t\right)\quad \text{e}\quad x_{2}\left(t\right)=A\cos\left(\omega_{2}t\right)$$

são as funções modelam individualmente o movimento de duas partículas que oscilam com frequências angulares ω_1 e ω_2 respectivamente, a soma $x\left(t\right)=x_{1}\left(t\right)+x_{2}\left(t\right)$ dessas duas funções é

$$x\left(t\right)=2A\cos\left(\frac{\triangle\omega}{2}t\right)\cos\left(\overline{\omega}t\right)\ . \tag{13}$$

Essa soma representa o movimento resultante dessas duas partículas. Aqui, $\triangle\omega=\omega_1-\omega_2$ e

$$\overline{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

é a frequência angular média.

(c) De acordo com o resultado que você obteve no item **(b)**, obtenha o movimento resultante de duas partículas que oscilam, na mesma direção, cujos movimentos são individualmente modelados por

$$x_{1}\left(t\right)=\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)\quad \text{e}\quad x_{2}\left(t\right)=\sin\left(\omega t\right)\ .$$

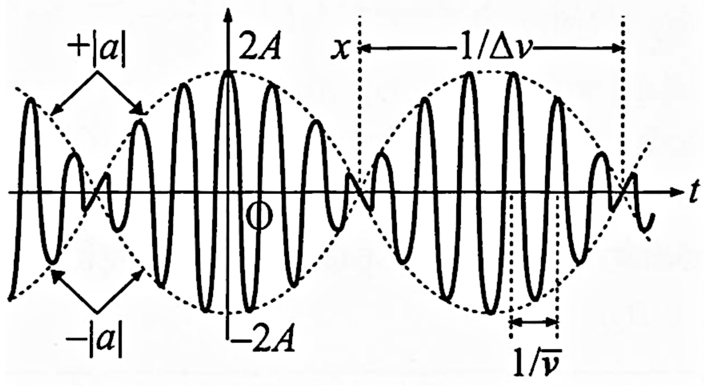

Figura 7

12. Uma maneira de reescrever o resultado (13), obtido no **Exercício 11**, de um jeito que pode ser um pouco mais intelígivel é um que dá um nome para um dos seus "pedaços". Esse "pedaço" é a função

$$a(t) = 2A\cos\left(\frac{\triangle\omega}{2}t\right)$$

que essencialmente modela o comportamento de algo que podemos interpretar como uma espécie de "amplitude" de $x(t)$. Aliás, toda essa inteligibilidade por trás de escrever (13) como

$$x(t) = a(t)\cos(\overline{\omega}t)$$

fica bastante clara quando graficamos essa função $x(t)$, num caso onde $\triangle\omega \ll \overline{\omega}$. Esse gráfico da função $x(t)$ (linha cheia) consta, por exemplo, na Figura 7, onde a "amplitude" $|a(t)|$ (linha interrompida) cumpre o papel de uma envoltória.

(a) Discuta o comportamento desse gráfico com as suas palavras.

(b) Qual é o significado das quantidades $1/\triangle\nu$ e $1/\overline{\nu}$ que são apontadas nesse gráfico?