4323101 – Física I para a Poli

Alguns comentários sobre o movimento circular

Maria Fernanda Araujo de Resende – resende@if.usp.br

1 Definição

Em linhas gerais, podemos afirmar que uma partícula realiza um movimento circular quando toda sua movimentação se sobrepõe a uma linha $s(t)$ que se identifica com uma circunferência ou, no mínimo, com um arco de circunferência com raio R constante. E, do mesmo jeito que pode existir uma infinidade de circunferências que podem servir como um "trilho" para esse movimento circular, também é infinito o número de movimentos circulares que uma partícula pode realizar sobre cada um desses trilhos.

Diante deste fato (ou seja, diante da infinidade de movimentos circulares que podem ser definidos), passa a ser mais do que interessante (ao invés de analisar os movimentos circulares mais complicados que existem e enlouquecer) analisar os mais movimentos circulares mais simples para entender algumas das características que podem ser gerais a todos eles. E um desses movimentos circulares mais simples que já somos capazes de entender é aquele que podemos chamar de **movimento circular uniforme**.

1.1 Movimento circular uniforme

A uniformidade que predica esse movimento circular segue a mesma lógica daquela que predica o movimento uniforme de uma partícula que não está restrita a se mover apenas sobre uma circunferência. Essa uniformidade caracteriza a taxa de variação do espaço que está sendo varrido por essa partícula com o passar do tempo: ou seja, dizer que temos um movimento (circular) uniforme significa dizer que a partícula que realiza esse movimento (circular) faz isso mantendo essa taxa constante.

Só que, no que diz respeito a esse movimento circular uniforme especificamente, cabe uma pequena ressalva. Afinal de contas, enquanto num movimento uniforme (que não carrega esse rótulo de ser “circular”), toda essa uniformidade é caracterizada pelo fato da velocidade de uma partícula ser um vetor com **módulo**, **direção** e **sentido** **constantes**, num movimento circular essa velocidade também é interpretável como um vetor de módulo constante, só que a direção e o sentido desse vetor **podem variar com o tempo**. E um bom jeito de entender porque isso acontece é olhando para os ponteiros de um relógio: se olharmos para o ponteiro dos segundos, por exemplo, e interpretarmos esse ponteiro como um vetor $\vec{r}(t)$ cuja origem está fixada no centro de rotação desse ponteiro, fica bem claro que esse ponteiro possui um tamanho (ou seja, um módulo) que é constante, porém, a cada segundo que passa, esse ponteiro assume uma nova direção e um novo sentido.

É claro que, quando olhamos para a situação do movimento que esse ponteiro executa, parece que todas essas características de possuir um módulo fixo, porém direção e sentido variáveis, não está associada especificamente à velocidade deste movimento circular. No entanto, quando lembramos que esse vetor velocidade $\vec{v}(t)$ do ponteiro precisa ser interpretado como a derivada total

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

do vetor posição em relação ao tempo, o fato da direção e do sentido de $\vec{r}(t)$ variarem com o tempo automaticamente implica que a direção e o sentido de $\vec{v}(t)$ também mudam.

1.1.1 Como a modelagem do movimento circular uniforme pode ser feita?

Uma das maneiras de entendermos direitinho essa última afirmação é através da constatação de que a posição de um movimento circular pode ser modelada através de

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (R\cos[\theta(t)], R\sin[\theta(t)]) \ , \tag{1}$$

onde R é o raio desta trajetória circunférica e $\theta(t)$ é uma função que, por mais maluca que seja, modela como o ângulo (que existe entre esse raio e o eixo x da Figura 1, por exemplo) varia com o tempo. No caso de um movimento circular uniforme, como esse

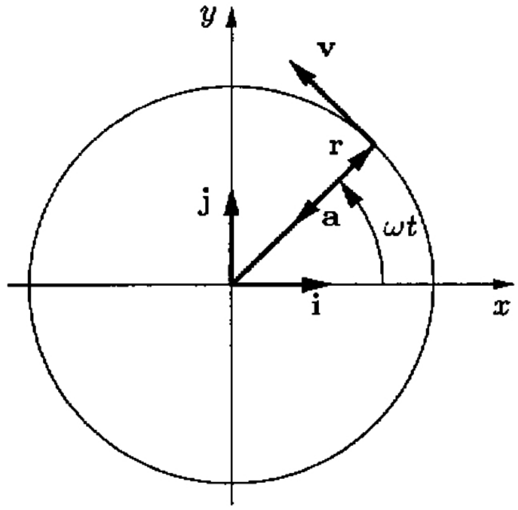

Figura 1

ângulo pode ser caracterizado por uma função

$$\theta\left(t\right)=\theta_0+\omega t \tag{2}$$

onde θ_0 (o ângulo inicial) e ω (a velocidade angular) são ambos constantes, ao admitirmos que, num instante $t=0\mathrm{s}$, a partícula estava no ponto $(R,0)$, esse movimento circular uniforme fica modelado através da função

$$\vec{r}\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)=\left(R\cos\left(\omega t\right),R\sin\left(\omega t\right)\right)\ .$$

Assim, como

$$\vec{v}\left(t\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)=\big(\underbrace{-\omega R\sin\left(\omega t\right)}_{v_x(t)},\underbrace{\omega R\cos\left(\omega t\right)}_{v_y(t)}\big) \tag{3}$$

o resultado dessa derivação acaba deixando claro duas coisas: (i) que o módulo v desta velocidade é realmente constante, já que

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\omega R\underbrace{\sqrt{\sin^2\left(\omega t\right)+\cos^2\left(\omega t\right)}}_{=1}=\omega R\ ;$$

e (ii) que esse vetor velocidade $\vec{v}(t)$ realmente assume uma nova direção e um novo sentido ao longo do tempo, já que os vetores $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ são sempre **perpendiculares**, uma vez que o produto escalar entre eles é

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{v} &= (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t))\cdot(-\omega R\sin(\omega t), \omega R\cos(\omega t)) \\ &= (R\cos(\omega t))\cdot(-\omega R\sin(\omega t)) + (R\sin(\omega t))\cdot(\omega R\cos(\omega t)) = 0\ . \end{aligned} \tag{4}$$

1.1.2 O que pode ser dito sobre a aceleração da partícula num movimento circular uniforme?

Diante do fato da **aceleração** de uma partícula também precisar ser tal que

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right),$$

a substituição do resultado obtido em (3) para o vetor velocidade também permite tirar conclusões análogas às que tiramos acima. Afinal de contas, como

$$\vec{a}(t) = \big(\underbrace{-R\omega^2\cos(\omega t)}_{a_x(t)}, \underbrace{-R\omega^2\sin(\omega t)}_{a_y(t)}\big)\ , \tag{5}$$

também é fácil perceber que (iii) esse vetor aceleração também possui um módulo

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 \underbrace{\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}}_{=1} = R\omega^2$$

que é constante e que (iv) que $\vec{a}(t)$ também assume uma nova direção e um novo sentido ao longo do tempo.

Aliás, uma boa maneira de entender a afirmação que consta neste item (iv) é, por exemplo, calculando o produto escalar entre os vetores $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$ e verificando que eles também são sempre **perpendiculares** do mesmo jeito que fizemos em (4). No entanto, uma maneira que é um pouco mais simples de verificar que $\vec{a}(t)$ também assume uma nova direção e um novo sentido com o decorrer do tempo é através da constatação de que, o fato de (5) poder ser reescrita como

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \left(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)\right) \ ,$$

acaba nos mostrando que

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t) \ .$$

Ou seja, $\vec{a}(t)$ também assume uma nova direção e um novo sentido ao longo do tempo porque $\vec{a}(t)$ é **antiproporcional** ao vetor posição $\vec{r}(t)$. Ou seja "dois", a aceleração de um movimento circular uniforme é sempre **radial** e, ao contrário do que ocorre com o vetor $\vec{r}(t)$, ela sempre aponta para o **centro** dessa circunferência de raio R. Note que é exatamente isso, esse fato da aceleração de um movimento circular uniforme sempre apontar para o centro dessa circunferência, que justifica o fato desta aceleração ser conhecida como **aceleração centrípeta**.

1.2 Movimento circular não uniforme

No caso de um movimento circular que não pode ser caracterizado como uniforme, toda essa não uniformidade está associada tão somente a não uniformidade que está por trás da modelagem do ângulo $\theta(t)$. Em outras palavras: ao contrário do que acontece com o movimento circular uniforme, onde $\theta(t)$ pode ser modelado pela função (2) onde ω é constante, num movimento circular não uniforme a velocidade angular **não é mais constante**. E o exemplo mais simples de movimento circular não uniforme que podemos explorar aqui, só para tentar entender alguma coisa diferente que ocorre nele, é o **movimento circular uniformemente variado**, que recebe esse nome devido ao fato do ângulo ser modelável por uma função

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \ ,$$

onde θ_0 (o ângulo inicial), ω_0 (a velocidade angular inicial) e α (a aceleração angular) são ambos constantes.

Aliás, se analisamos esse movimento circular uniformemente variado admitindo uma situação bem especial, onde, num instante $t = 0\mathrm{s}$, a partícula estava no ponto $(R, 0)$ com uma velocidade angular inicial nula, não é difícil notar que esse movimento fica modelado através da função

$$\vec{r}\,(t) = (x\,(t)\,, y\,(t)) = \left(R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right), R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) \ . \tag{6}$$

1.2.1 Qual é a diferença geral entre os movimentos circulares uniforme e uniformemente variado?

Uma vez que a velocidade e a aceleração que estão relacionadas a esse novo movimento circular precisam ser tais que

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \ \text{ e } \ \vec{a}\,(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) \tag{7}$$

respectivamente, a substituição de (6) na primeira relação em (7) nos mostra que

$$\vec{v}\,(t) = \left(\underbrace{-\alpha R t\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}_{=v_x(t)}, \underbrace{\alpha R t\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}_{=v_y(t)}\right) \ . \tag{8}$$

Note que esse resultado (que é um pouco diferente daquele que foi obtido em (3), uma vez que os coeficientes que multiplicam os senos e cossenos em (8) também são funções do tempo) é bastante razoável com a condição que impusemos (ou que, melhor dizendo, admitimos) ao problema: afinal de contas, como a velocidade angular inicial admitida é zero, faz muito sentido que a velocidade da partícula sobre a circunferência também seja nula no instante $t = 0$ s. Note também que, apesar dos coeficientes que multiplicam os senos e cossenos em (8) serem funções do tempo, o vetor velocidade $\vec{v}\,(t)$ continua sendo perpendicular ao vetor posição $\vec{r}\,(t)$, uma vez que

$$\begin{aligned} \vec{r}\cdot\vec{v} &= (R\cos(\omega t)\,, R\sin(\omega t))\cdot(-\alpha Rt\sin(\omega t)\,, \alpha Rt\cos(\omega t)) \\ &= (R\cos(\omega t))\cdot(-\alpha Rt\sin(\omega t)) + (R\sin(\omega t))\cdot(\alpha Rt\cos(\omega t)) = 0\,. \end{aligned}$$

No entanto, existe uma diferença relacionada não apenas à aceleração de um movimento circular uniformemente variado, mas a todas as acelerações detodos os movimentos circulares não uniformes. E essa diferença é: **essa aceleração não é mais radial**, uma vez que, quando levamos em conta o resultado obtido em (8), a derivação das suas componentes nos mostram que

$$\begin{aligned} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} &= \left[\frac{d}{dt}(-\alpha Rt)\right]\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) - \alpha Rt\frac{d}{dt}\left[\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right] \\ &= \underbrace{-\alpha R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}_{=a_x^I(t)}\underbrace{-(\alpha t)^2 R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}_{=a_x^{II}(t)} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} &= \left[\frac{d}{dt}(\alpha Rt)\right]\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right) + \alpha Rt\frac{d}{dt}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right] \\ &= \underbrace{\alpha R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}_{=a_y^I(t)}\underbrace{-(\alpha t)^2 R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)}_{=a_y^{II}(t)}\,. \end{aligned}$$

Ou seja, como o resultado das duas últimas derivações nos mostram que o vetor aceleração

$$\vec{a}\,(t) = (a_x(t)\,, a_y(t)) = \left(a_x^I(t)\,, a_y^I(t)\right) + \left(a_x^{II}(t)\,, a_y^{II}(t)\right)$$

que descreve esse movimento uniformemente variado pode ser interpretado como o fruto da soma de dois vetores

$$\begin{aligned} \left(a_x^I(t)\,, a_y^I(t)\right) &= \left(-\alpha R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right), \alpha R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(-\alpha R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right), \alpha R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) = \frac{1}{t}\vec{v}\,(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(a_x^{II}(t), a_y^{II}(t)\right) &= -\left((\alpha t)^2 R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right), (\alpha t)^2 R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) \\ &= -(\alpha t)^2\left(R\cos\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right), R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha t^2\right)\right) = -(\alpha t)^2 \vec{r}(t)\ ,\end{aligned}$$

fica muito claro que ela **não pode ser considerada como radial**, muito embora a última componente da soma

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{t}\vec{v}(t) - (\alpha t)^2 \vec{r}(t)$$

que define essa aceleração seja, de fato, um termo radial.