

4323203 – Física III para a Poli

Uma seleta de exercícios resolvidos

Maria Fernanda Araujo de Resende – resende@if.usp.br

1 Cálculo de alguns campos elétricos

1.1 Exemplo 1: Fio finito uniformemente carregado

Considere que uma carga Q está **uniformemente distribuída** ao longo de um trecho do eixo x , mais especificamente entre $x_1 = -L/2$ e $x_2 = L/2$. Devido ao fato desta distribuição ser uniforme, algo que podemos afirmar é que a densidade linear de cargas que está associada a essa distribuição é $\lambda = Q/L$.

No entanto, quando queremos avaliar qual é o campo elétrico que é gerado por essa distribuição de cargas, que podemos identificar como a de um **fio finito uniformemente carregado**, podemos fazer essa avaliação de várias maneiras. Afinal de contas, em que ponto queremos calcular esse campo elétrico especificamente?

1.1.1 Caso I

Supondo que queremos calcular o campo elétrico num ponto P que está sobre o próprio eixo x (ou seja, na posição x_P tal que $x_P > L/2$), podemos considerar a situação que consta na Figura 1. Nela, por exemplo, está destacado uma carga infinitesimal dq , a qual representa a quantidade de carga que consta num elemento infinitesimal do fio carregado que possui comprimento dx .

Considerando que P está a uma distância $r = x_P - x$ da posição x onde consta esse dx , a lei de Coulomb nos permite estimar o valor desse campo elétrico dE_x , que é devido a esse elemento diferencial de carga ao longo do eixo x , como

$$dE_x \hat{i} = \frac{k}{(x_P - x)^2} dq \hat{i} = \frac{k\lambda}{(x_P - x)^2} dx \hat{i}. \quad (1)$$

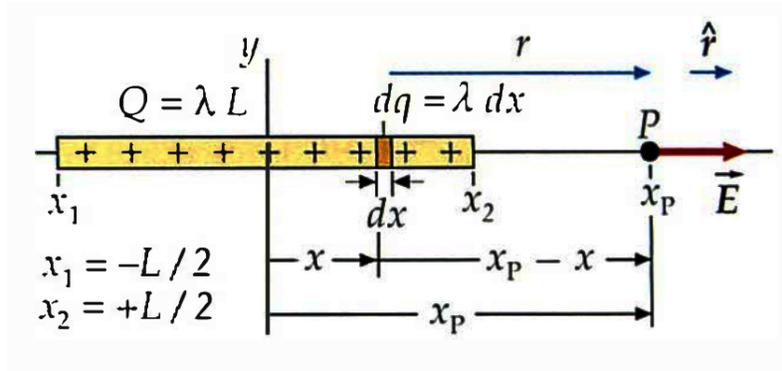


Figura 1

Deste modo, como o campo total \vec{E} que queremos avaliar é devido ao fio todo, fica claro que, para o conhecermos, precisamos integrar (1) de $x_1 = -L/2$ até $x_2 = L/2$. Ou seja,

$$E_x = k\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(x_P - x)^2} dx ,$$

Só que, para resolver essa integral mais facilmente, é interessante considerar $u = x_P - x$. Afinal, como $du = -dx$, segue que

$$\begin{aligned} E_x &= -k\lambda \int_{x_P+L/2}^{x_P-L/2} \frac{1}{u^2} du = \frac{k\lambda}{u} \Big|_{x_P+L/2}^{x_P-L/2} \\ &= k\lambda \left(\frac{1}{x_P - L/2} - \frac{1}{x_P + L/2} \right) = \frac{k\lambda L}{x_P^2 - (L/2)^2} , \end{aligned}$$

Ou seja, se substituirmos Q no lugar de λL nesta última integral, vemos que

$$E_x = \frac{kQ}{x_P^2 - (L/2)^2} , \text{ para } x_P > L/2 ,$$

de onde acaba ficando claro que, para um P que está bem distante do fio ($x_P \gg L$), esse campo elétrico é aproximadamente igual ao mesmo kQ/x_P^2 que decorre de uma carga puntual Q .

1.1.2 Caso II

Todavia, se o campo elétrico que queremos avaliar é gerado pelo mesmo fio, só que num novo ponto P que não pertence ao eixo x , precisamos fazer alguns ajustes sobre as

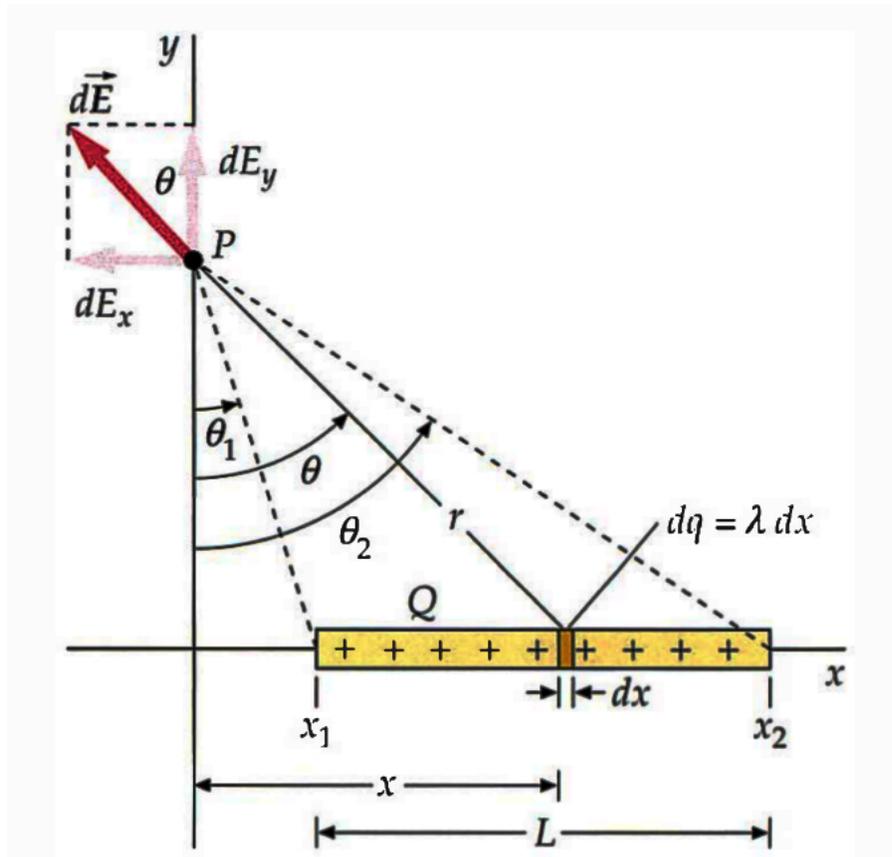


Figura 2

nossas considerações. E o primeiro ajuste que precisamos fazer é escolher um novo sistema de coordenadas que seja o mais cômodo para essa nossa avaliação.

É claro que, se não quisermos fazer ajustes tão radicais, um dos sistemas mais cômodos de coordenadas é aquele onde continuamos colocando a linha de carga sobre o eixo x . Porém, como P não mais está sobre o eixo x , ao colocarmos P sobre qualquer lugar podemos **impor** que o eixo y passe por ele, tal como já mostra a Figura 2. Assim, quando levamos em conta que a magnitude do campo elétrico, que é devido a um elemento de carga dq , é dada por

$$|d\vec{E}| = \frac{k}{r^2} dq = \frac{k\lambda}{r^2} dx ,$$

essa mesma Figura 2 nos mostra que a componente y desse campo é

$$dE_y = |d\vec{E}| \cos \theta = \left(\frac{k\lambda}{r^2} dx \right) \cdot \frac{y}{r} = \frac{k\lambda y}{r^3} dx ,$$

uma vez que $\cos \theta = y/r$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Deste modo, se denotarmos por x_1 e x_2 os extremos do fio, a componente total E_y do campo elétrico pode ser estimada através da integral

$$E_y = \int_{x_1}^{x_2} dE_y = k\lambda y \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{r^3} dx .$$

Observe que r depende de x ; ou seja,

$$E_y = k\lambda y \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx .$$

E para resolver essa integral é necessário fazer uma transformação de variáveis: mais especificamente fazer uma **substituição trigonométrica**. A mais natural, diante do que mostra a Figura 2, seria uma

$$x = r \sin \theta \quad \text{e} \quad y = r \cos \theta \tag{2}$$

onde trocamos as variáveis cartesianas pelas polares. Porém, como r depende de x , iremos usar a substituição¹

$$x = y \tan \theta \quad \text{e} \quad y = r \cos \theta \tag{3}$$

pois é ela quem nos permite transformar a integral (1.1.2) em algo que depende só de θ . Afinal, como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \tan \theta = \sec^2 \theta &\Leftrightarrow dx = y \sec^2 \theta d\theta \quad \text{e} \\ y = r \cos \theta &\Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\cos \theta}{y} , \end{aligned}$$

¹Note que estamos considerando essa nova substituição trigonométrica porque (2) e (3) formam sistemas de equações que são **equivalentes**. Afinal de contas, usando as duas equações que constam em (2), obtemos a segunda

$$\frac{x}{y} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta \Rightarrow x = y \tan \theta$$

que consta em (3).

ao substituirmos tudo isso em (1.1.2), temos

$$\begin{aligned} E_y &= k\lambda y \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos \theta}{y}\right)^3 y \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{k\lambda}{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{k\lambda}{y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = \frac{kQ}{Ly} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) . \end{aligned}$$

Analogamente é possível demonstrar que

$$E_x = \frac{kQ}{Lx} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) .$$

Ou seja,

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = \left[\frac{kQ}{Ly} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \right] \hat{i} + \left[\frac{kQ}{Ly} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \right] \hat{j} .$$

1.2 Exemplo 2: Fio infinito uniformemente carregado

De acordo com o resultado que foi obtido no exemplo anterior, é muito claro que, se, ao invés de um fio finito, tivermos um infinito, o campo elétrico que é sentido em qualquer ponto P que não está sobre o eixo x pode ser obtido tomando os limites $x_1 \rightarrow -\infty$ e $x_2 \rightarrow \infty$.

Entretanto, como os resultados de E_x e E_y foram expressos em termos de θ_1 e θ_2 , precisamos notar que

$$x = y \tan \theta \Rightarrow \begin{cases} x_1 \rightarrow -\infty & \text{quando } \theta_1 \rightarrow -\pi/2 \\ x_2 \rightarrow +\infty & \text{quando } \theta_2 \rightarrow +\pi/2 . \end{cases}$$

Assim, substituindo isso nas equações acima, vemos que

$$E_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = \frac{2k\lambda}{y} ,$$

e que, portanto, o campo elétrico total neste caso de fio infinito é dado por

$$\vec{E}_{\text{infinito}} = \frac{2k\lambda}{y} \hat{j}.$$

2 Campo elétrico calculado via Lei de Gauss

2.1 Exemplo 3: Carga puntual

Sabemos que a distribuição mais simples que existe é aquela onde toda a carga Q está concentrada num único ponto. Aliás, devido à Lei de Coulomb, sabemos que o campo elétrico que é gerado por esta carga num ponto P é dado por

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}, \quad (4)$$

onde \vec{r} é o vetor que descreve a posição de P em relação ao ponto onde essa carga foi posta.

Entretanto, apesar de já sabermos de tudo isso, é interessante ilustrar como esse mesmo campo elétrico em P pode ser obtido através da Lei de Gauss. Afinal, ela nos diz que o fluxo, que segue da existência desse campo ao atravessar uma superfície gaussiana S , é dado por

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi k Q_{\text{int}}$$

sobre a superfície. No caso, Q_{int} é a quantidade de carga que consta na região contida por S .

E para obtermos o valor desse campo, que é gerado por essa carga puntual Q , via Lei de Gauss, devemos explorar toda a simetria da situação admitindo que esse campo é radial. Ou seja, devemos levar em conta que, em todos os pontos do espaço que distam r desta carga, o valor do campo elétrico que procuramos é sempre o mesmo. Desta maneira, como essa simetria nos diz que, se centrarmos uma bola imaginária no ponto onde a carga Q está, o valor do campo elétrico sobre a superfície desta bola será sempre o mesmo, para aplicar a Lei de Gauss neste caso basta considerarmos S como a superfície desta bola,

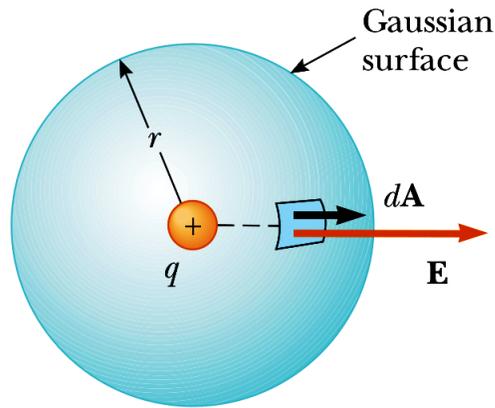


Figura 3

conforme mostra a Figura 3.

Assim, como \vec{E} é paralelo ao vetor $d\vec{A}$, que é normal a S em cada ponto, temos que

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = E (4\pi r^2) = 4\pi kQ ,$$

onde r é o raio desta bola imaginária, de onde segue que

$$E = \frac{kQ}{r^2} .$$

Ou seja, o mesmo campo mencionado em (4).

2.2 Exemplo 4: Distribuição de carga esfericamente simétrica

Já para avaliar qual é o campo elétrico que é devido a uma distribuição de cargas esfericamente simétrica, a história não é muito diferente. Afinal de contas, como essa distribuição de cargas é, de novo, esfericamente simétrica, podemos proceder analogamente ao exemplo anterior e envolver essa distribuição de cargas com uma superfície gaussiana que também se identifica com a superfície de uma bola imaginária de raio r .

Porém, quando dizemos que uma distribuição de carga é esfericamente simétrica, estamos dizendo que existe um acúmulo de cargas que ocupa o volume de uma bola real de raio R . Ou seja, temos uma bola tridimensional real que (i) é preenchida internamente por cargas que totalizam uma carga total Q e que (ii) possui uma densidade volumétrica de carga que chamaremos de ρ .

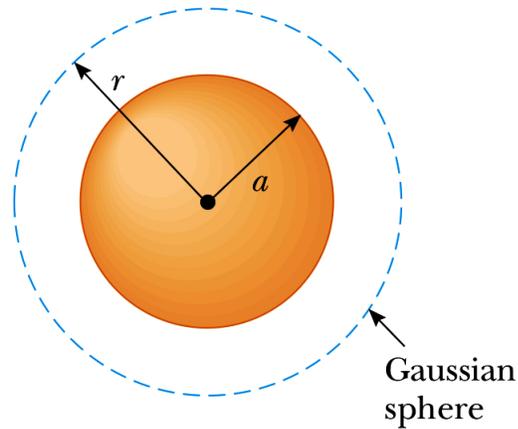


Figura 4

Entretanto, antes de sairmos tentando aplicar a Lei de Gauss, devemos notar que existem duas situações que precisam ser avaliadas aqui: uma, que é o campo elétrico do lado de fora desta bola real de cargas; e outra, que é o campo elétrico do lado de dentro desta mesma bola.

2.2.1 O campo elétrico externo

E a situação mais fácil de ser avaliada aqui é justamente essa primeira que acabamos de mencionar: ou seja, a do campo elétrico do lado de fora dessa bola real de cargas. Pois, devido a toda simetria esférica que está novamente presente aqui, bem como ao fato de que a carga total Q está **completamente** contida em qualquer bola imaginária como a da Figura 4, onde $r \geq R$, a lei de Gauss nos diz novamente que

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = E (4\pi r^2) = 4\pi kQ .$$

Ou seja, a lei de Gauss novamente nos mostra que o campo elétrico externo é exatamente o mesmo

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r} \quad (5)$$

que seria associado a uma situação puntual como a do exemplo anterior.

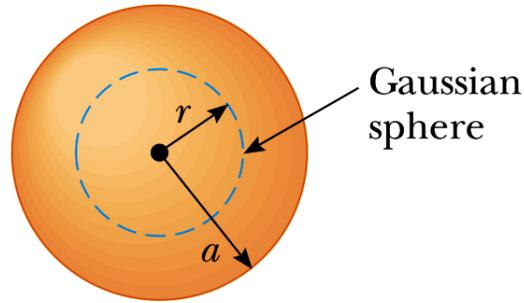


Figura 5

2.2.2 O campo elétrico interno

Entretanto, a situação do campo elétrico interno, embora não seja nada difícil de ser calculada, é um pouco diferente. Afinal de contas, apesar da mesma simetria esférica se fazer presente aqui, a carga que está contida numa bola imaginária como a da Figura 5, onde $r < R$, não é Q . Ou seja, antes de tentarmos aplicar a lei de Gauss, precisamos determinar qual é a carga Q' que está contida nessa bola imaginária de raio $r < R$.

E uma coisa que podemos fazer, diante da possibilidade de ser possível admitir que a densidade volumétrica é **constante**, é notar que

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$$

onde

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

são os volumes das bolas real e imaginária respectivamente. Pois é exatamente isso que nos permite notar que, neste caso onde $r < R$, temos

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow Q' = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 .$$

Assim, tendo em mãos o valor da carga Q' que está contida nessa bola imaginária de raio $r < R$, finalmente podemos usar a lei de Gauss no cálculo desse campo interno, o que nos

mostra que

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = 4\pi kQ' \\ \Rightarrow E (4\pi r^2) &= 4\pi kQ \left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow E = kQ \frac{r}{R^3}\end{aligned}$$

Ou seja, do lado de dentro dessa distribuição esfericamente simétrica de cargas, o campo elétrico é

$$\vec{E} = kQ \frac{r}{R^3} \hat{r}.$$

Trata-se de um resultado bastante razoável haja vista que, quando $r = 0$, o campo elétrico é nulo e, quando $r = R$, o campo elétrico assume o mesmo valor

$$E = kQ \frac{R}{R^3} = \frac{kQ}{R^2}$$

que é obtido via (5).

2.3 Exemplo 5: Casca esférica uniformemente carregada

E se quiséssemos calcular o campo elétrico que é devido a uma carga esférica uniformemente carregada? Quais seriam as diferenças em relação a tudo o que calculamos no exemplo anterior?

A resposta dessa indagação pode ser dada de uma maneira muito simples, desde que notemos uma coisa: que, ao contrário do exemplo anterior, onde tínhamos cargas distribuídas uniformemente dentro de um volume esférico, dizer que temos um campo elétrico que é gerado por uma casca esférica significa que todas as cargas estão distribuídas apenas sobre a superfície dessa esfera. Ou seja, **não existe carga alguma no interior da bola que é revestida por essa casca esférica.**

Vendo as coisas por essa perspectiva, o cálculo do campo elétrico usando a lei de Gauss se torna trivial. Afinal, se a lei de Gauss nos diz que o fluxo de um campo elétrico é proporcional a carga total que está no interior do volume contido por uma superfície gaussiana,

o campo elétrico, neste caso, é dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} (kQ/r^2) \hat{r}, & \text{quando } r \geq R \text{ e} \\ 0 & \text{, caso contrário .} \end{cases} \quad (6)$$

Aqui, R é o raio da casca esférica.

2.4 Exemplo 6: Fio infinito uniformemente carregado

Vamos considerar agora uma situação que é um pouco diferente de tudo o que foi calculado usando a lei de Gauss: vamos calcular o campo elétrico que é gerado por um fio infinito uniformemente carregado. Em verdade, esse cálculo já foi feito anteriormente, usando outra técnica, e o resultado obtido foi

$$\vec{E}_{\text{infinito}} = \frac{2k\lambda}{y} \hat{j},$$

onde (i) y é a distância que existe entre um fio, posto sobre o eixo x , e um ponto P que não pertence a este eixo, e (ii) λ é a densidade uniforme de carga associada ao fio. Ou seja, embora o Exemplo 1 tenha sido resolvido considerando que o campo elétrico era bidimensional, estamos diante de uma situação que tem uma simetria **cilíndrica**. Em outras palavras, se a situação do Exemplo 1 fosse tridimensional, o campo elétrico, em qualquer ponto da superfície de um cilindro imaginário que adota esse fio como o seu eixo de simetria, possuiria a mesma magnitude.

Tomando por base a constatação desta simetria, e principalmente levando em conta que a densidade linear de carga desse fio uniformemente carregado pode ser escrita como

$$\lambda = \frac{Q}{L},$$

onde Q é a carga finita que está contida no trecho do fio que está contido no cilindro imaginário de comprimento L que consta na Figura 6, ao tomarmos a superfície desse cilindro imaginário como a superfície gaussiana S que precisamos para aplicar a lei de

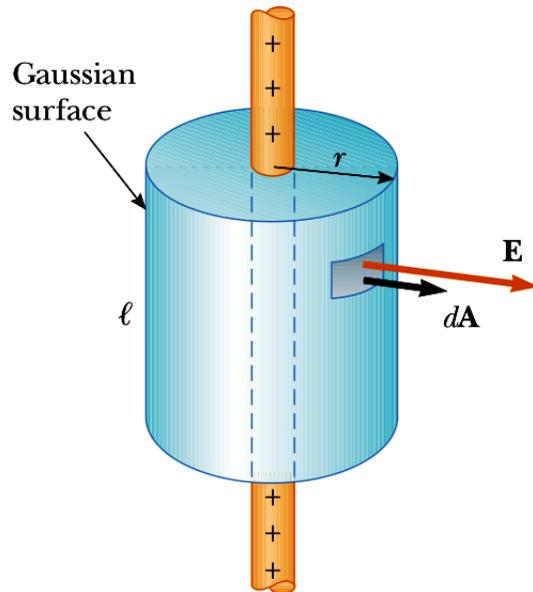


Figura 6

Gauss, segue que

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = E (2\pi r L) = 4\pi k Q . \quad (7)$$

Aqui, r é o raio deste cilindro imaginário, enquanto $A = 2\pi r L$ é a área lateral deste mesmo cilindro imaginário, a única por onde o fluxo elétrico passa.

Nestes termos, de uma simples manobra algébrica em (7), obtemos

$$\vec{E} = \left(\frac{2k Q}{r L} \right) \hat{r} = \left(\frac{2k \lambda}{r} \right) \hat{r} \quad (8)$$

como o campo elétrico que é gerado por esse fio infinito, o mesmo resultado já obtido anteriormente no Exemplo 2.

2.5 Exemplo 7: Placa infinita uniformemente carregada

Uma segunda situação diferente das anteriores que iremos considerar aqui é aquela onde temos uma distribuição de uniforme de cargas sobre uma placa que suporemos ser infinita por questões de comodidade. Aqui, não iremos nos importar com a espessura da placa: ou seja, iremos assumir que esse conjunto de cargas funciona, na prática, como uma espécie de fronteira plana que pode ser idealizada como infinita, conforme mostra a

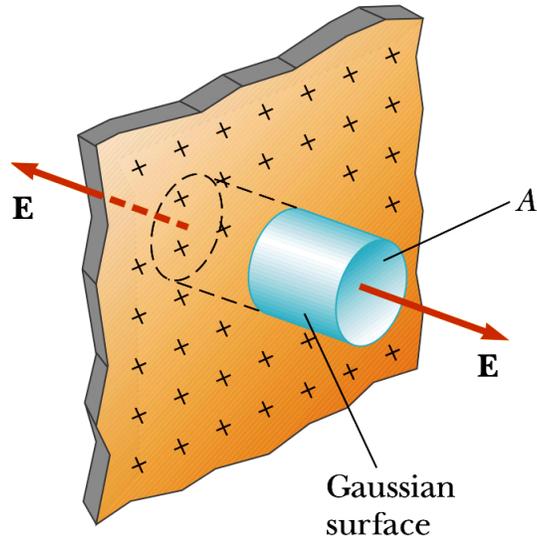


Figura 7

Figura 7 a seguir.

Devido ao fato dessa distribuição de cargas ser uniforme, a simetria presente nesta situação acaba nos dizendo que o campo elétrico \vec{E} que é gerado por essa placa (i) é perpendicular ao plano que a contém e (ii) possui a mesma magnitude em todos os pontos que são equidistantes deste plano. Aliás, se assumirmos que essa é uma distribuição de cargas **positivas**, conforme já sugere a mesma figura, o simples fato de que essas cargas imprimem uma força que tende a afastar qualquer carga de prova positiva para longe da placa já indica que a direção do campo elétrico de um lado da placa é **oposta** à direção do outro lado. E esse é um fato importante que precisa ser considerado aqui. Afinal de contas, como a superfície gaussiana S que podemos tomar aqui pode ser, por exemplo, a do pequeno cilindro imaginário que consta na Figura 7, cujo eixo de simetria é perpendicular ao plano, a lei de Gauss nos mostra que

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = E(2A) = 4\pi kQ,$$

onde Q é a carga que está contida no interior do cilindro imaginário e A é a área de cada base desse cilindro. Ou seja, essa placa infinita é responsável por gerar um campo elétrico cuja magnitude é

$$E = 2\pi k \frac{Q}{A} = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (9)$$

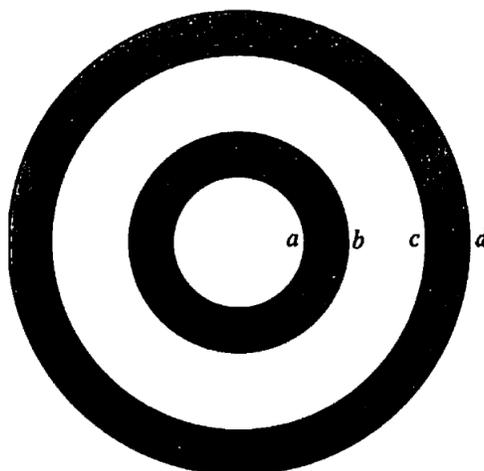


Figura 8

em **todos** os pontos do espaço.

2.6 Exemplo 8: Duas cascas esféricas condutoras com espessuras não desprezíveis

Aliás, já que, no exemplo anterior, lidamos com uma situação onde pudemos desprezar a espessura de uma placa, agora vamos lidar com uma situação onde não podemos fazer isso. E a situação com a qual lidaremos aqui é uma onde temos duas esferas condutoras concêntricas, conforma ilustra a Figura 8 a seguir. Ou seja, uma situação onde ambas esferas possuem raios internos e externos: no caso da esfera interna, ela possui raios interno a e externo b , enquanto a esfera externa tem raios interno c e externo d .

Diante do fato de que queremos avaliar qual é o campo elétrico total que é gerado por essas duas esferas quando elas estão carregadas, iremos admitir que a carga total que consta sobre a superfície externa da esfera interna é Q_1 , enquanto que a carga total que foi distribuída sobre a superfície externa da esfera externa é Q_2 . Assim, notando que toda a simetria radial que caracteriza esta situação nos permite estimar esse campo elétrico, em todos os seus pontos, através da lei de Gauss, a primeira coisa que pode ser dita aqui é que, para todos os pontos que estão a uma distância r do centro dessas esferas e são tais que $0 \leq r \leq a$, o campo elétrico é **zero**. Afinal de contas, qualquer superfície gaussiana dentro dessa região **não** contém qualquer carga que seja capaz de gerar um fluxo elétrico.

Aliás, devido ao fato dessas duas esferas serem **condutoras** e possuírem espessuras

que não são desprezíveis, também é válido afirmar que o campo elétrico entre $a < r < b$ e $c < r < d$ também é **zero**, uma vez que o **campo elétrico no interior de qualquer condutor é sempre zero**. Desta maneira, as únicas regiões onde o campo elétrico não é nulo e, portanto, precisa ser avaliado, são aquelas onde (a) $b \leq r \leq c$ e (b) $r \geq d$.

No caso (a), como a melhor superfície gaussiana que podemos adotar aqui é aquela que se identifica como a superfície de uma bola imaginária de raio r tal que $b \leq r \leq c$, vemos que esse campo elétrico satisfaz a

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = E (4\pi r^2) = 4\pi k Q_1 ,$$

uma vez que toda a carga Q_1 está contida dentro desta bola imaginária. Ou seja,

$$\vec{E}_{(a)} = \frac{kQ_1}{r^2} \hat{r} , \text{ quando } b \leq r \leq c .$$

Já no caso (b), como a melhor superfície gaussiana que podemos usar é a superfície de uma bola imaginária de raio $r \geq d$ que contém a carga total $Q_1 + Q_2$, a lei de Gauss nos mostra que

$$\vec{E}_{(b)} = \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r^2} \hat{r} , \text{ quando } r \geq d .$$

Note que, embora tenhamos carregado a superfície externa maior apenas com uma carga Q_2 , o efeito prático de toda essa concentricidade de esferas carregadas faz com que a densidade de carga sobre essa superfície externa maior seja dada por

$$\sigma_d = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi d^2} .$$

Já em relação às demais superfícies, temos que $\sigma_a = 0$, e que

$$\sigma_b = \frac{Q_1}{4\pi b^2} \quad \text{e} \quad \sigma_c = -\frac{Q_1}{4\pi c^2} ,$$

haja vista que a presença de uma carga Q_1 sobre a superfície de raio b acaba **induzindo** uma carga $-Q_2$ sobre a superfície de raio c .

3 Cálculo de algumas diferenças de potenciais e capacitâncias

3.1 Exemplo 9: Capacitor de placas planas

A grosso modo, podemos afirmar que um capacitor nada mais é do que um sistema onde temos duas distribuições de cargas, com sinais opostos e separadas por uma distância não nula, onde existe uma relação um-para-um: ou seja, se um capacitor está sendo definido usando duas regiões disjuntas do espaço, ao colocarmos uma carga Q numa delas, devemos colocar outra carga $-Q$ na outra região. E um dos capacitores mais simples que podem ser formados é aquele onde essas duas regiões se identificam como duas placas paralelas carregadas, igual aquelas que constam no Exemplo 7: ou seja, uma situação onde podemos desprezar os efeitos de borda que podem estar envolvidos para com esse sistema.

Considerando que este é justamente o caso que está ilustrado pelo Figura 9, onde as placas à direita e à esquerda têm densidades superficiais de carga iguais a σ e $-\sigma$ respectivamente, a superposição dos campos elétricos que são gerados por cada placa acaba definindo um campo elétrico uniforme não nulo apenas entre as placas: aliás, de acordo com o resultado obtido em (9) para uma única placa, o campo elétrico que consta

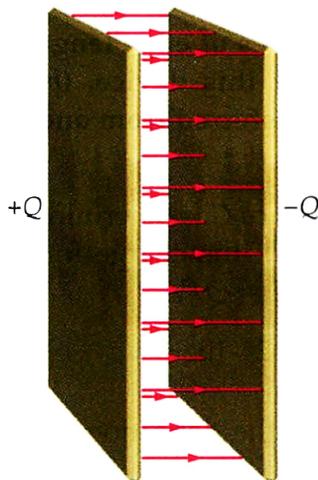


Figura 9

entre as placas do nosso capacitor tem magnitude igual a

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (10)$$

e aponta da esquerda para a direita.

Mas um fato interessante aqui é que, devido ao potencial elétrico num ponto P ser dado por

$$V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

somos capazes de avaliar qual é a diferença de potencial que existe entre essas duas placas carregadas. Afinal de contas, quando levamos em conta que

$$V_{(+)} = \int_{(+)}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{e} \quad V_{(-)} = \int_{(-)}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

são os potenciais sobre as placas com densidades σ e $-\sigma$ respectivamente, essa diferença de potencial é dada por

$$\Delta V = V_{(+)} - V_{(-)} = \int_{(+)}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{(-)}^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

de onde vemos que, devido ao fato do campo ser uniforme entre as placas,

$$\Delta V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d. \quad (11)$$

Note que, nas situações práticas, em que não lidamos com placas infinitas mas ainda podemos descartar os efeitos de borda, essa densidade de carga pode ser vista em termos da razão

$$\sigma = \frac{Q}{A},$$

onde Q é a carga total que foi distribuída ao longo da placa à esquerda² que possui uma área A exatamente igual a da placa à direita. E o aspecto mais importante desta constatação é que ela nos permite verificar que a magnitude a carga e essa diferença de potencial

²Ou a magnitude das cargas que foram postas individualmente sobre ambas as placas.

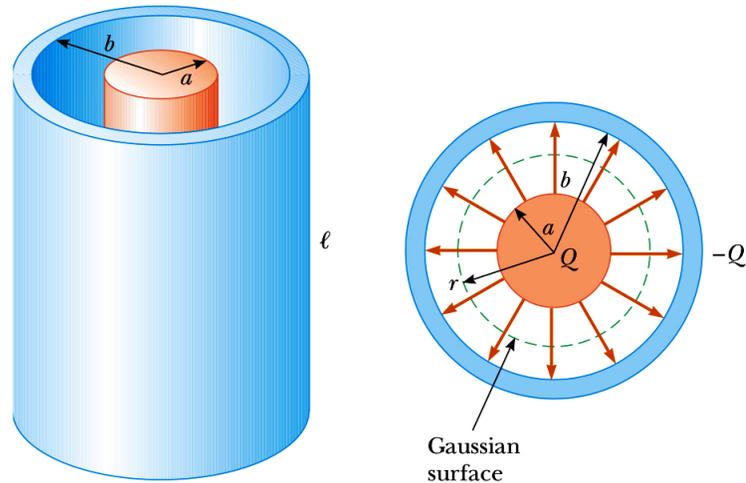


Figura 10

(11) são proporcionais entre si: ou seja, que

$$\Delta V = \frac{d}{\epsilon_0 A} Q .$$

Desta maneira, como a razão

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right|$$

define a **capacitância** que caracteriza qualquer capacitor, vemos que a capacitância de um capacitor de placas paralelas é igual a

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} .$$

3.2 Exemplo 10: Capacitor cilíndrico

Imagine agora que temos um cilindro condutor de raio a e comprimento l , onde há uma carga elétrica Q uniformemente distribuída pela sua superfície. Imagine também que este cilindro é coaxial a uma casca cilíndrica que possui raio $b > a$, uma espessura desprezível e uma carga igual a $-Q$. Este sistema, que é exatamente o que está ilustrado na Figura 10 a seguir, define o que chamamos de **capacitor cilíndrico**. Ou seja, trata-se de outro sistema onde podemos atribuir uma capacitância.

Para calcular essa capacitância, é interessante levar em conta que existe uma simetria aqui. Afinal de contas, antes de calcularmos essa capacitância, precisamos calcular a diferença de potencial que existe por decorrência do campo elétrico presente no interior desse capacitor cilíndrico. Esse campo elétrico é exatamente o mesmo (8) que é devido a um fio uniformemente carregado: basta ver que, quando levamos em conta a simetria cilíndrica aqui envolvida e usamos um cilindro imaginário de raio $a < r < b$ e comprimento L para aplicarmos a lei de Gauss, isso nos leva a

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_S dA = E (2\pi r L) = 4\pi k Q'$$

Ou seja,

$$\vec{E} = \left(\frac{2kQ'}{rL} \right) \hat{r} = \left(\frac{2k\lambda}{r} \right) \hat{r},$$

onde $\lambda = Q'/L = Q/l$ é uma densidade linear que caracteriza essa distribuição de cargas, sendo Q' a carga total contida dentro desse cilindro imaginário.

Diante disso, é imediato que

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -2k\lambda \int_a^b \frac{1}{r} dr \\ &= -2k\lambda \ln r \Big|_a^b = -2k\lambda (\ln b - \ln a) = -2k\lambda \ln \left(\frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

e que, portanto, a capacitância procurada é

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right| = \frac{l}{2k \ln(b/a)}.$$

A única coisa que precisamos destacar aqui é que, apesar de toda a semelhança com o exemplo anterior, um capacitor de placas não paralelas **não** possui necessariamente a mesma densidade de cargas nas superfícies: o que precisa ser necessariamente **igual** é o número de cargas que existe nas placas que definem esse capacitor, sejam elas planas ou não. Ou seja, um capacitor é criado através de uma relação um-para-um entre cargas elétricas e não necessariamente entre densidades de carga. E no caso do capacitor cilíndrico

que temos aqui,

$$\sigma_a = \frac{Q}{2\pi al} \quad \text{e} \quad \sigma_b = -\frac{Q}{2\pi bl}$$

são as densidades superficiais de carga sobre as superfícies de raios a e b respectivamente, as quais **necessariamente** têm sinais opostos.