4323203 – Física III para a Poli

Mais uma seleta de exercícios resolvidos

1 Cálculo de correntes

1.1 Exemplo 1: Densidade de corrente constante

Considere que você tem um fio condutor cilíndrico de raio $R = 2,0$ mm e suponha que, nele, seja estabelecida uma corrente elétrica cuja densidade é uniforme e valha $J = 2,0 \times 10^5$ A/m^2. Qual é o valor da corrente elétrica que atravessa especificamente a porção externa desse fio entre as distâncias radiais $R/2$ e R?

Bom... Como a relação que existe entre uma corrente elétrica I e a sua densidade $\vec{J}$ é dada por

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \, , \tag{1}$$

onde $d\vec{A}$ é o vetor normal a uma secção do fio cuja magnitude é igual a área desta secção, esse problema pode ser resolvido notando que

(i) a corrente que passa por todo o fio cilíndrico de raio R é

$$I' = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA = J\left(\pi R^2\right) \text{ , e que}$$

(ii) a corrente que passa apenas pela parte mais interna do fio, cujo raio é $R/2$, é

$$I'' = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA = J\left(\frac{\pi R^2}{4}\right) \, .$$

Afinal de contas, a corrente elétrica procurada nada mais é do que a subtração da corrente interna calculada em (ii) de (i). Ou seja,

$$I = I' - I'' = J\left(\frac{3\pi R^2}{4}\right) \approx 1,9 \text{ A} \, .$$

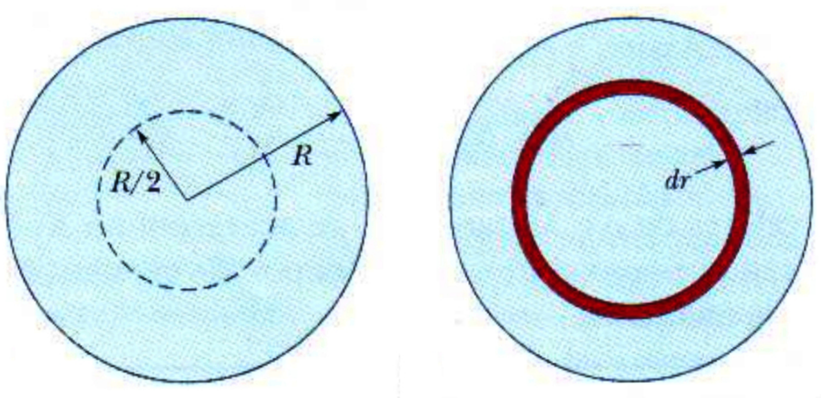

Figura 1

1.2 Exemplo 2: Densidade de corrente variável

E se, ao invés de considerar a mesma densidade de corrente do exemplo anterior, tivéssemos que calcular a corrente que atravessa a mesma porção externa do mesmo fio considerando $J = ar^2$, onde $a = 3,0 \times 10^{11} \mathrm{A/m^4}$? Qual seria o valor dessa corrente, considerando que r é medido em metros?

Neste caso, a única mudança fundamental que precisamos fazer em relação ao que já fizemos no exemplo anterior é notar que, como a densidade de corrente aqui é uma função de r, o elemento infinitesimal dA que aparece na integral (1) também precisa ser expresso como uma função de r. E expressar esse dA deste jeito nem é algo tão difícil de ser feito: afinal de contas, se olharmos para o que consta na Figura 1, é fácil perceber que esse elemento infinitesimal pode ser expresso como

$$dA = 2\pi r dr \; . \tag{2}$$

já que ele se refere à área infinitesimal que, de fato, queremos usar como elemento de integração. Nestes termos, ao substituirmos essa expressão (2), bem como a expressão

$J = ar^2$, em (1), concluímos que

$$\begin{aligned} I &= \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ &= 2\pi a \int_{R/2}^{R} \left(ar^2\right) \cdot (2\pi r dr) = 2\pi a \int_{R/2}^{R} r^3 dr = \pi a \left. \frac{r^4}{2} \right|_{R/2}^{R} = \frac{15}{32} \pi a R^4 \\ &\approx 7,1 \text{ A} \end{aligned}$$

é o valor da corrente que procurávamos.

2 Força magnética

2.1 Exemplo 3: Força magnética sobre um fio com corrente

Uma coisa que sabemos é que força $\vec{F}_B$, que surge exclusivamente devido a presença de um campo magnético $\vec{B}$ que age sobre uma partícula carregada com carga q, é dada por

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \ ,$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade com a qual essa partícula se move.

No entanto, e se quisermos saber qual é o valor dessa mesma força quando, por exemplo, ao invés de uma única carga se movendo na presença de um campo magnético, temos várias delas constituindo uma corrente elétrica? O que precisamos fazer para obter esse resultado?

Para responder a esse questionamento, a melhor maneira que existe é "abusar" de tudo o que o Cálculo Diferencial e Integral nos proporciona e, no lugar de $\vec{F}_B$ e q, vamos usar as suas versões diferenciais na expressão acima. Ou seja, escrever

$$d\vec{F}_B = dq \ \vec{v} \times \vec{B} \ . \tag{3}$$

Afinal de contas, são justamente essas substituições que, por exemplo, nos permitem entender que, se tivermos apenas uma porção infinitesimal de carga dq na presença de um campo magnético, a força magnética $d\vec{F}_B$ que age sobre essa carga também será infinitesimal.

Desta maneira, ao notarmos não apenas que a corrente estabelecida sobre o fio é tal que

$$I = \frac{dq}{dt} \;\Leftrightarrow\; dq = \frac{dq}{dt}dt = Idt \;, \tag{4}$$

mas que a velocidade com que essas partículas (que possuem essa carga dq) que definem I também é tal que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} \;\Leftrightarrow\; \vec{v}dt = \frac{d\vec{l}}{dt}dt = d\vec{l}\,, \tag{5}$$

não é difícil concluir que

$$d\vec{F}_B = (Idt)\,\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = I\left(\frac{d\vec{l}}{dt}dt\right) \times \vec{B} = Id\vec{l} \times \vec{B} \tag{6}$$

Ou seja, essa manobra algébrica que acabamos de fazer, por decorrência da substituição de (4) e (5) na equação (3), acaba de nos mostrar que não precisamos saber especificamente qual é a carga e/ou a velocidade de cada uma das partículas que compõe uma corrente para saber qual é a força magnética que age sobre o fio: as únicas coisas que precisamos saber aqui para obter o valor desta força magnética são (i) o valor dessa corrente e (ii) o sentido no qual ela flui.

Nestes termos, como esse "abusamento" do Cálculo Diferencial e Integral nos leva a concluir que, para obter o valor da força magnética total que age sobre o fio inteiro, basta integrar (6), surge duas observações bem interessantes. E a primeira delas se refere ao fato de que, se o fio for **finito** e $\vec{B}$ for um campo **uniforme**, essa integral se reduz a

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} \tag{7}$$

Ou seja, se $\vec{B}$ fizer um ângulo θ com o fio, tal como mostra a Figura 2, o módulo desta força será

$$F_B = ILB \sin\theta \;,$$

onde L é tamanho do fio.

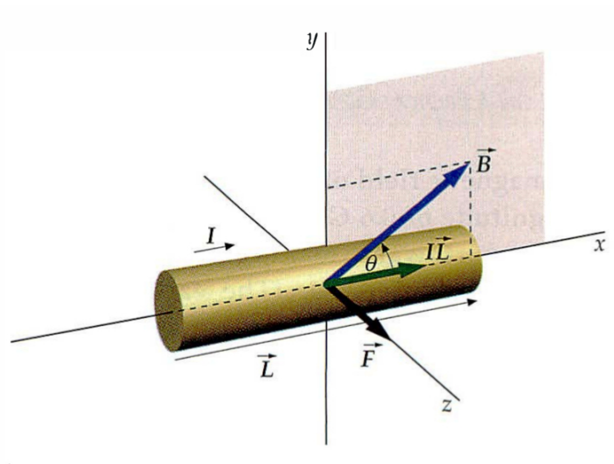

Figura 2

Já a segunda observação interessante que surge aqui é que, se o fio que se propõe a conduzir essa corrente elétrica for **fechado**, teremos

$$\vec{F}_B = \oint_{\text{fio}} d\vec{F}_B = \oint_{\text{fio}} I d\vec{l} \times \vec{B} = 0 \ ,$$

pois

$$\oint_{\text{fio}} d\vec{l} = 0 \ .$$

2.2 Exemplo 4: Força magnética sobre um fio curvo em formato de espira semicircular

Já a força que surge por decorrência da presença de um campo magnético, que tomaremos especificamente como $\vec{B} = B\hat{k}$, que age sobre um fio semicircular de raio R como o da Figura 3, onde temos uma corrente I constante fluindo entre os pontos a e b, pode ser calculada facilmente desde que notemos uma coisa: que devido à simetria desta semicírculo neste caso em específico, as componentes da força magnética que são paralelas ao eixo x são **canceladas**.

Ou seja, a força magnética total, que aponta na direção positiva do eixo y, possui um

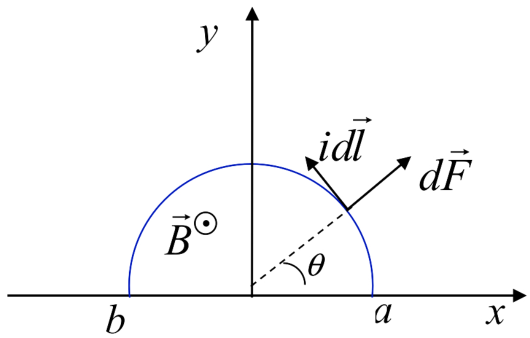

Figura 3

módulo

$$\vec{F} = F_y = \int_0^{\pi} Idl\ B\sin\theta \int_0^{\pi} IBR\sin d\theta = 2IBR$$

2.3 Exemplo 5: Torque sobre uma espira com corrente

Aliás, diante do resultado que acabamos de obter no exemplo anterior, uma pergunta que pode surgir na cabeça do leitor é: e se, ao invés de uma espira semicircular, tivéssemos uma espira fechada? Qual seria a consequência disso?

Bom... Uma coisa que já é certa aqui é que essa força magnética total, que estaria associada a essa espira fechada, seria igual a **zero**. Afinal de contas, como acabamos de dizer no Exemplo 1 que **a força magnética relacionada a qualquer fio que descreve um circuito fechado é zero**, não há qualquer motivo para isso deixar de ser uma verdade justamente aqui.

Porém, existe um fato curioso, que se envolve justamente forças magnéticas e espiras fechadas, que merece ser discutido aqui: esse fato se chama **torque**. E para entender o que é esse torque no contexto de uma espira fechada, vamos considerar uma situação extremamente simples, porém bem específica: vamos considerar uma situação do fio retangular que consta na Figura 4 supondo que (i) por ele passa uma corrente constante I que flui no sentido **anti-horário** e (ii) que ele está imerso num campo uniforme $\vec{B}$ que é **paralelo** a superfície contida pela espira.

Note que, como esse fio é retangular e, pela Figura Figura 4, os seus lados 1 e 3 são **paralelos** a $\vec{B}$, a primeira coisa que podemos concluir de (7) é que as forças magnéticas

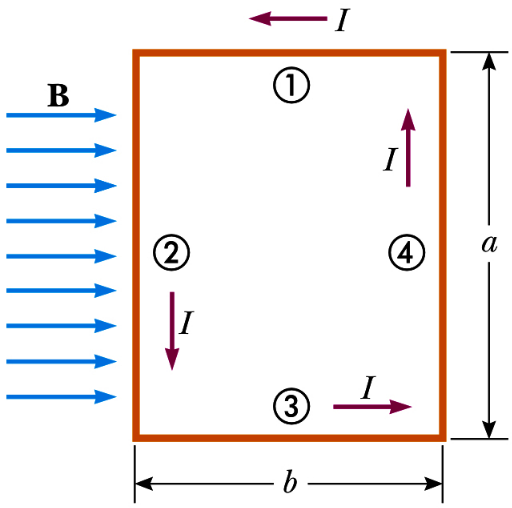

Figura 4

que agem sobre esses dois pedaços do fio são **nulas**. Afinal de contas[1],

$$\vec{L}_1 \times \vec{B} = \vec{L}_3 \times \vec{B} = 0 \ .$$

No entanto, essa não é a situação dos lados 2 e 4: estes dois lados são perpendiculares a $\vec{B}$ e, portanto, as forças magnéticas que agem sobre esses dois pedaços de fio **não são nulas**; no caso, elas têm a mesma magnitude

$$F_2 = F_4 = IaB \ . \tag{8}$$

Todavia, note também que, de acordo com a mesma (7), essas forças, cuja magnitude acabamos de calcular, apontam para sentidos **contrários**. Ou seja, elas são capazes de fazer essa espira quadrada **gire** em torno do seu eixo central segundo o esquema que, por exemplo, consta na Figura 5, onde vemos um corte superior da situação. Ou seja "dois", essas forças produzem um torque, que iremos chamar propositalmente de $\vec{\tau}_{\max}$, cuja magnitude é

$$\tau_{\max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = 2IaB\frac{b}{2} = IAB \ . \tag{9}$$

Aqui $A = ab$ é o valor da área que está contida no interior dessa espira retangular.

É claro que, diante do fato de termos acabado de dizer que esse torque foi proposi-

[1]Aqui estamos considerando que o vetor $\vec{L}$ que descreve essa espira retangular é definido como $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \vec{L}_4$.

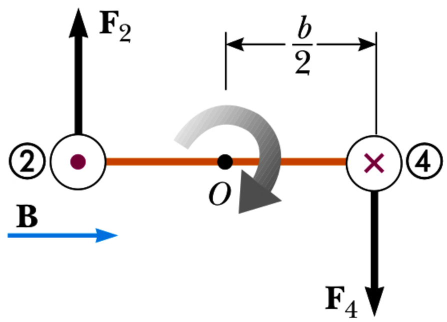

Figura 5

talmente chamado de $\vec{\tau}_{\max}$, o leitor pode estar pensando por que fizemos isso. Afinal de contas essa é uma pergunta perfeitamente legítima. E ao leitor que faz esta pergunta, convidamos ele a pensar numa situação que é ligeiramente diferente: convidamos ele a pensar naquela situação onde a área contida pela espira não é mais paralela ao campo $\vec{B}$, numa situação onde essa espira está numa posição ligeiramente inclinada por um ângulo θ conforme sugere a Figura 6.

No caso desta nova situação, como a própria Figura 6 indica, teremos um novo torque

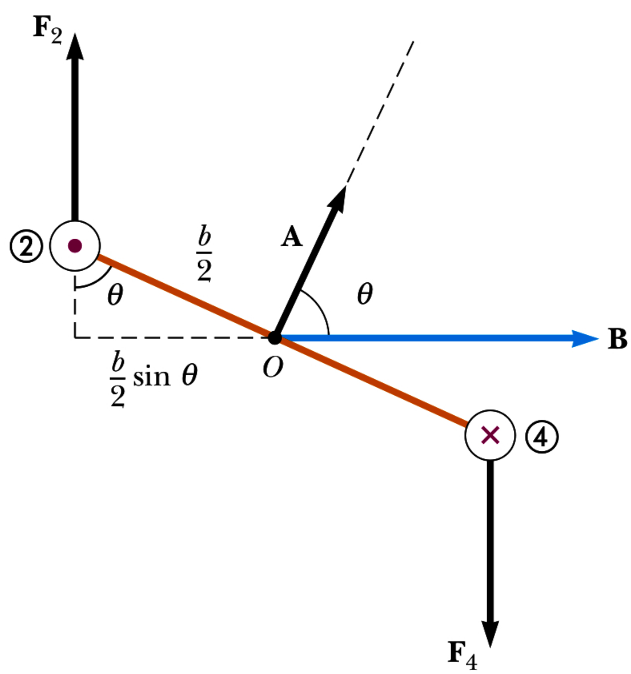

Figura 6

cuja magnitude é

$$\tau = F_2 \frac{b}{2} \sin\theta + F_4 \frac{b}{2} \sin\theta = 2IaB\frac{b}{2} \sin\theta = IAB \sin\theta \ . \tag{10}$$

Ou seja,

$$\tau = \tau_{\max} \sin\theta \ .$$

E é justamente diante deste último resultado que surge a justificativa de termos chamado o primeiro torque (aquele relacionado à situação onde a área da espira era paralela a $\vec{B}$) propositalmene de $\tau_{\max}$: afinal de contas, esse torque (9) nada mais é do que o valor **máximo** que pode ser associado a essa espira retangular na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Ou seja, sempre que tivermos uma espira que é **paralela** a um campo magnético, a magnitude do seu torque será **máxima**.

Aliás, note duas coisas: (i) a presença do $\sin\theta$ em (10) e (ii) a presença, nesta mesma equação (10), do produto da magnitude do campo magnético pela área da espira. Afinal, esses duas coisas são extremamente interessantes quando confrontamos o resultado obtido em (10) com aquele que segue do produto vetorial $\vec{\mu} \times \vec{B}$, onde $\vec{\mu} = I\vec{A}$: **esses dois resultados são exatamente os mesmos!**

Assim, diante desta última constatação, concluímos que o torque associado a essa espira, por onde passa uma corrente elétrica e que está imersa num campo magnética, é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \ , \tag{11}$$

onde $\vec{\mu}$ é o que chamamos de **momento de dipolo magnético** por analogia ao caso eletrostático. Aqui $\vec{A}$ nada mais é do que o vetor $\vec{A} = A\hat{n}$, onde $\hat{n}$ é o vetor normal a superfície contida pela espira cuja direção segue a regra que consta na Figura 7. Aliás, embora estejamos fazendo toda essa explanação considerando uma espira especificamente retangular, vale frisar que, conforme sugere essa mesma Figura 7, esse resultado (11) vale para qualquer espira, independentemente do formato geométrico que essa espira possua.

Por fim, vale mencionar um fato bem curioso sobre esse torque, o qual é endossado pela própria equação (11): esse torque sempre aparece quando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são dois vetores

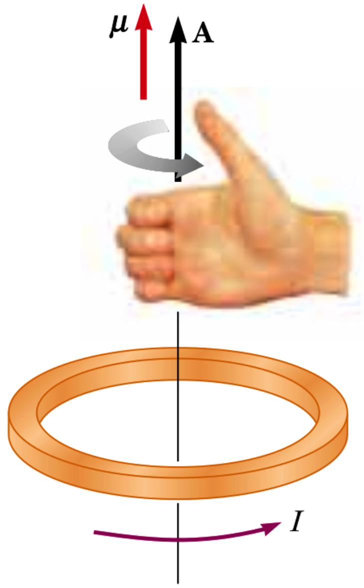

Figura 7

não paralelos. E a explicação física que está por trás disso é inteiramente análoga àquela que está relacionada a um dipolo elétrico na presença de um campo elétrico: esse torque surge como consequência do fato de que um campo magnético sempre tende a **alinhar** qualquer dipolo magnético, tal como é o caso, por exemplo, de um imã. Por se dizer, uma espira, como essa que estamos avaliando aqui, pode ser efetivamente considerada como um imã.