

43-3 DISPERSÃO E PODER DE RESOLUÇÃO

A habilidade de uma rede produzir espectros que permitam medições precisas dos comprimentos de onda é determinada através de duas propriedades intrínsecas da rede: (1) a separação $\Delta\theta$ entre as linhas espectrais que diferem em comprimento de onda de uma pequena quantidade $\Delta\lambda$ e (2) a largura ou nitidez das linhas.

No Problema Resolvido 43-2, calculamos a separação angular entre duas linhas muito próximas do duplete de sódio amarelo, para o qual $\Delta\lambda = 0,59 \text{ nm}$. Para este caso, obtivemos uma separação $\Delta\theta = 0,014^\circ$ entre os máximos principais de primeira ordem destas linhas. A separação angular $\Delta\theta$ por unidade de intervalo de comprimento de onda $\Delta\lambda$ é chamada de *dispersão D* da rede, ou

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \tag{43-7}$$

Para que linhas de comprimentos de onda aproximadamente iguais apareçam com a maior separação possível, é necessário que a rede tenha a maior dispersão possível.

Para descobrirmos qual a propriedade física da rede que determina a sua dispersão, diferenciamos a Eq. 43-1 ($d \sin \theta = m\lambda$), tratando θ e λ como variáveis, o que fornece

$$d \cos \theta d\theta = m d\lambda,$$

ou, em termos de pequenas diferenças em vez de diferenciais,

$$d \cos \theta \Delta\theta = m \Delta\lambda. \tag{43-8}$$

A dispersão D é dada por $\Delta\theta/\Delta\lambda$, ou

$$D = \frac{m}{d \cos \theta}. \tag{43-9}$$

A dispersão aumenta à medida que o espaçamento entre as fendas decresce. Também é possível aumentarmos a dispersão trabalhando com ordens mais altas (maior m), como a Fig. 43-10 ilustra. Note que a dispersão não depende do número de ranhuras.

PODER DE RESOLUÇÃO

Se a rede produz linhas largas, então os máximos das linhas espectrais de comprimentos de onda muito próximos podem se sobrepor, tornando difícil determinar se estas linhas têm um ou mais componentes e medir os comprimentos de onda das linhas com grande precisão. Dessa forma, desejamos selecionar uma rede que produza as linhas mais estreitas possíveis.

Obtemos uma medida razoável da habilidade de resolver linhas próximas de diferentes comprimentos de onda aplicando o critério de Rayleigh (ver Seção 42-4): se o máximo de uma linha cai sobre o primeiro mínimo do seu vizinho, é possível resolver as linhas. Na Seção 43-1, definimos a largura de uma linha espectral dessa forma, como o intervalo angular $\delta\theta$ do máximo até o primeiro mínimo. O limite de resolução da rede ocorre quando duas linhas no espectro estão separadas por um intervalo de comprimento de onda $\Delta\lambda$ tal que a diferença $\delta\theta$ entre as suas posições angulares seja dada pela Eq. 43-6. Definimos o *poder de resolução R* da rede como

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \tag{43-10}$$

Se as linhas forem estreitas ($\delta\theta$ é pequeno), então o intervalo de comprimento de onda $\Delta\lambda$ correspondente deve ser pequeno e o poder de resolução devemos ser grande. Assim, devemos escolher uma rede com o maior R possível.

Para encontrar a propriedade física da rede que determina R , resolvemos a Eq. 43-8 para o espaçamento $\Delta\theta$ entre linhas próximas e (utilizando o critério de Rayleigh) igualamos este resultado à largura da linha $\delta\theta$, dada pela Eq. 43-6 como sendo o espaçamento entre o máximo e o primeiro mínimo. Isto resulta em

$$\frac{m \Delta\lambda}{d \cos \theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta},$$

e resolvendo para $R (= \lambda/\Delta\lambda)$ obtemos

$$R = Nm. \tag{43-11}$$

O poder de resolução, assim como a dispersão, aumenta com o número de ordem. Ao contrário da dispersão, R depende do número de linhas N , mas é independente de sua separação d . Para maximizar o poder de resolução, escolhemos uma rede com o maior número de linhas. Para um dado espaçamento entre as fendas d , a rede com a maior largura total tem o maior poder de resolução (isto é, produz as linhas espectrais mais nítidas).

A dispersão e o poder de resolução medem diferentes aspectos da habilidade de uma rede de difração em produzir linhas claramente separadas. Considere, por exemplo, três redes A , B e C cujas propriedades estão listadas na Tabela 43-1. Suponha que as redes estejam iluminadas com luz composta de um duplete de linhas de 500 nm separadas por um intervalo $\Delta\lambda = 0,10 \text{ nm}$. Escolhemos as propriedades da rede A de modo que as duas linhas do duplete no máximo de primeira ordem estão exatamente no limite de resolução; isto é, o máximo de uma linha está sobre o mínimo da outra, conforme mostrado na Fig. 43-11a. A rede B tem o dobro da dispersão da rede A , mas o mesmo poder de re-

Rede	N	d (nm)	θ	R	D (10^{-4} rad/nm)
A	5.000	10.000	2,9°	5.000	1,0
B	5.000	5.000	5,7°	5.000	2,0
C	10.000	10.000	2,9°	10.000	1,0

*Para $\lambda = 500 \text{ nm}$ e $m = 1$.

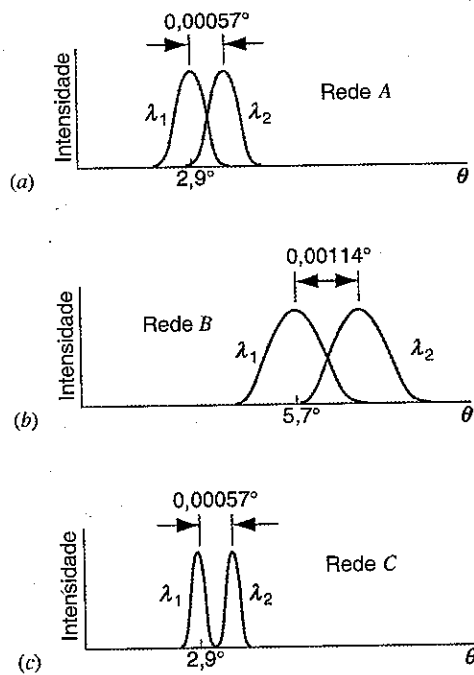


Fig. 43-11. O padrão de intensidade de duas linhas em $\lambda = 500$ nm separadas por $\Delta\lambda = 0,10$ nm, produzido pelas três redes da Tabela 43-1. A rede B tem a maior dispersão e a rede C o maior poder de resolução.

solução, e ela produz o espectro mostrado na Fig. 43-11b. Na realidade, todos os intervalos angulares estão multiplicados por um fator 2, incluindo a largura angular e a separação angular dos picos. Se a medição com a rede A estiver limitada à habilidade de se determinar pequenos intervalos angulares, uma troca pela rede B irá melhorar a medição.

A rede C tem o dobro do poder de resolução de A, mas tem a mesma dispersão. Os picos na Fig. 43-11c aparecem com a mesma separação angular dos da Fig. 43-11a, mas com larguras menores. Agora, o máximo de um pico está claramente fora do primeiro mínimo do outro e as duas linhas são mais facilmente distinguíveis uma da outra utilizando a rede C.

As larguras totais das três redes, que são iguais ao produto Nd , são 50 mm para a rede A, 25 mm para a rede B e 100 mm para a rede C. Note da Fig. 43-11 que as larguras dos picos dependem inversamente da largura da rede, conforme sugerido pela Eq. 43-6.

PROBLEMA RESOLVIDO 43-3.

Uma rede tem 9600 linhas uniformemente distribuídas ao longo de uma largura $W = 3,00$ cm e é iluminada pela luz da descarga de vapor de mercúrio. (a) Qual a dispersão esperada, na terceira ordem, nas proximidades da luz verde intensa ($\lambda = 546$ nm)? (b) Qual o poder de resolução desta rede na quinta ordem?

Solução (a) O espaçamento da rede é dado por

$$d = \frac{W}{N} = \frac{3,00 \times 10^{-2} \text{ m}}{9600} = 3125 \text{ nm.}$$

É necessário encontrar o ângulo θ para o qual a linha em questão ocorre.

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{m\lambda}{d} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{(3)(546 \text{ nm})}{3125 \text{ nm}} \right) = 31,6^\circ.$$

Agora podemos calcular a dispersão. Da Eq. 43-9,

$$\begin{aligned} D &= \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{3}{(3125 \text{ nm})(\cos 31,6^\circ)} \\ &= 1,13 \times 10^{-3} \text{ rad/nm} \\ &= 0,0646^\circ/\text{nm} = 3,87 \text{ arc min/nm.} \end{aligned}$$

(b) Da Eq. 43-11,

$$R = Nm = (9600)(5) = 4,80 \times 10^4.$$

Assim, próximo a $\lambda = 546$ nm e na quinta ordem, uma diferença de comprimento de onda dada por (ver Eq. 43-10)

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{546 \text{ nm}}{4,80 \times 10^4} = 0,011 \text{ nm}$$

pode ser resolvida.

PROBLEMA RESOLVIDO 43-4.

Uma rede de difração tem $1,20 \times 10^4$ ranhuras uniformemente distribuídas ao longo de uma largura $W = 2,50$ cm. Ela é iluminada com uma incidência normal por luz amarela de uma lâmpada de vapor de sódio. Esta luz contém duas linhas muito próximas de comprimentos de onda de 589,00 e 589,59 nm. (a) Com que ângulo o máximo de primeira ordem ocorre para o primeiro comprimento de onda? (b) Qual a separação angular entre estas duas linhas (na primeira ordem)? (c) Quão próximo, em termos de comprimento de onda, as duas linhas podem estar (na primeira ordem) de modo que possam ser resolvidas por esta rede? (d) Quantas ranhuras a rede precisa ter para resolver as linhas do duplete de sódio?

Solução (a) O espaçamento da rede d é dado por

$$d = \frac{W}{N} = \frac{2,50 \times 10^{-2} \text{ m}}{1,20 \times 10^4} = 2083 \text{ nm.}$$

O máximo de primeira ordem corresponde a $m = 1$ na Eq. 43-1. Assim, temos

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{m\lambda}{d} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{(1)(589,00 \text{ nm})}{2083 \text{ nm}} \right) = 16,4^\circ.$$

(b) Aqui devemos considerar a dispersão da rede. Da Eq. 43-9, a dispersão é

$$\begin{aligned} D &= \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{1}{(2083 \text{ nm})(\cos 16,4^\circ)} \\ &= 5,00 \times 10^{-4} \text{ rad/nm.} \end{aligned}$$

Da Eq. 43-7, a equação da definição da dispersão, temos

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= D \Delta\lambda \\ &= (5,00 \times 10^{-4} \text{ rad/nm})(589,59 \text{ nm} - 589,00 \text{ nm}) \\ &= 2,95 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0,0169^\circ = 1,01 \text{ arc min.} \end{aligned}$$

Enquanto o espaçamento da rede d permanecer constante, este resultado é válido não importando quantas linhas existam na rede.

(c) Aqui, devemos considerar o *poder de resolução* da rede. Da Eq. 43-11, o poder de resolução é

$$R = Nm = (1,20 \times 10^4)(1) = 1,20 \times 10^4.$$

Com base na Eq. 43-10 que define o poder de resolução, temos

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{589 \text{ nm}}{1,20 \times 10^4} = 0,049 \text{ nm}.$$

A rede pode facilmente resolver as duas linhas de sódio, as quais têm uma separação de comprimento de onda de 0,59 nm. Note que este resultado depende somente do número de ranhuras da rede e é independente de d , o espaçamento entre ranhuras adjacentes.

(d) De acordo com a Eq. 43-10, a equação da definição de R , a rede precisa ter um poder de resolução de

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589 \text{ nm}}{0,59 \text{ nm}} = 998.$$

Da Eq. 43-11, o número de ranhuras necessárias para alcançar este poder de resolução (na primeira ordem) é

$$N = \frac{R}{m} = \frac{998}{1} = 998 \text{ ranhuras}.$$

Uma vez que a rede tem aproximadamente 12 vezes mais ranhuras do que este valor, ela pode facilmente resolver as linhas do duplete de sódio, assim como foi mostrado na parte (c).

43-4 DIFRAÇÃO DE RAIOS X

Raios X são radiação eletromagnética com comprimentos de onda da ordem de 0,1 nm (comparados com 500 nm para um comprimento de onda típico de luz visível). A Fig. 43-12 mostra raios X produzidos quando elétrons de um filamento aquecido F são acelerados por uma diferença de potencial V e atingem um alvo de metal.

Para comprimentos de onda assim tão pequenos, uma rede de difração óptica comum não pode ser utilizada da forma normalmente empregada. Para $\lambda = 0,10 \text{ nm}$ e $d = 3000 \text{ nm}$, por exemplo, a Eq. 43-1 mostra que o máximo de primeira ordem ocorre em

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{m\lambda}{d} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{(1)(0,10 \text{ nm})}{3 \times 10^3 \text{ nm}} \right) = 0,0019^\circ.$$

Isto está muito próximo do máximo central para que possa ser usado na prática. Uma rede com $d \approx \lambda$ é desejável, mas, como os comprimentos de onda de raios X são aproximadamente iguais aos diâmetros atômicos, estas redes não podem ser construídas mecanicamente.

Em 1912, o físico Max von Laue imaginou que um sólido cristalino, composto de um arranjo regular de átomos, pudesse formar uma “rede de difração” tridimensional natural para os

raios X. A Fig. 43-13 mostra que se um feixe colimado de raios X, com uma distribuição contínua de comprimentos de onda, incidir sobre um cristal, tal como cloreto de sódio, feixes intensos (correspondendo à interferência construtiva dos muitos centros de difração de que o cristal é feito) aparecem em direções nitidamente definidas. Se esses feixes atingem um filme fotográfico, eles formam um arranjo de “manchas de Laue”. A Fig. 43-14, que é um exemplo real dessas manchas, demonstra que a hipótese de Laue é, portanto, correta. Os arranjos atômicos no cristal podem ser deduzidos através de um estudo cuidadoso das posições e intensidades das manchas de Laue de uma forma semelhante à que se poderia utilizar para deduzir a estrutura de uma rede óptica (isto é, um perfil detalhado das suas fendas) através de um estudo das posições e intensidades das linhas no padrão de interferência. Atualmente, outros experimentos suplantaram de um modo considerável a técnica de Laue, mas o princípio permanece o mesmo (ver Questão 23).

A Fig. 43-15 mostra como os átomos de sódio e de cloro (estritamente, íons Na^+ e Cl^-) estão dispostos para formarem um cristal de cloreto de sódio. Este padrão, que tem simetria *cúbica*, é uma das muitas possibilidades exibidas pelos sólidos. O modelo representa a *célula unitária* para o cloreto de sódio. Esta é a menor célula da qual o cristal pode ser feito repetindo-o nas três dimensões.

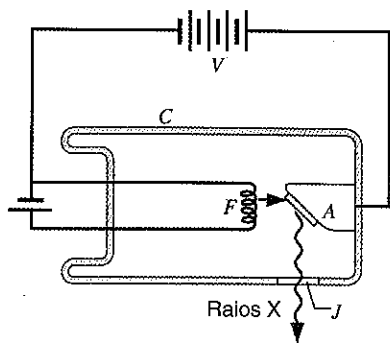


Fig. 43-12. Raios X são gerados quando elétrons do filamento aquecido F , acelerados através de uma diferença de potencial V , atingem um alvo de metal A na câmara de vácuo C . A janela J é transparente aos raios X.

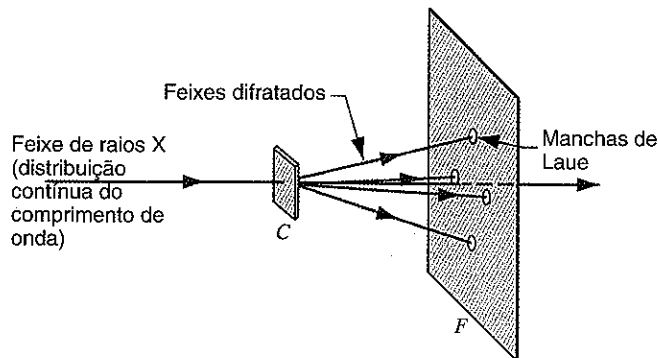


Fig. 43-13. Um feixe de raios X atinge um cristal C . Intensos feixes difratados aparecem em determinadas direções, formando um padrão de Laue sobre o filme fotográfico F .