4310277 – Física IV para Química

Segunda lista de exercícios

1. Considere uma situação em que temos uma corda submetida a uma perturbação de modo que, em qualquer um dos pontos x que parametrizam a sua extensão, essa mesma perturbação se identifica com uma oscilação harmônica simples. Assumindo que toda esta situação física modela-se por uma função

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) \quad , \tag{1}$$

onde A, k, ω e ϕ são constantes reais.

(a) De acordo com o item **(d)**, do **quarto exercício** da **PRIMEIRA LISTA**, como você reescreveria a função (1) em termos de uma única variável $x' = x - vt$? Qual o significado disso, lembrando que o papel de $y_1(x,t)$ é o de representar uma onda progressiva?

(b) Tomemos, agora, que uma perturbação pode ser modelada pela função

$$y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t + \phi) \quad . \tag{2}$$

Qual é a diferença desta nova situação em relação àquela envolvida para com (1)? Para responder isto, tente reescrever (2) em termos de um único parâmetro x'', analogamente ao feito no item anterior.

(c) Já que, tanto (1) como (2), são duas funções periódicas nas suas váriáveis t e x que estão relacionadas ao tempo e espaço respectivamente, calcule os períodos temporal T e espacial λ que estão associados a essas funções.

(d) Notando que λ pode ser interpretado como o *comprimento* associado a uma onda, da mesma maneira que é perfeitamente possível estimar uma frequência temporal como $f = 1/T$, também seria possível fazer uma estimativa inteiramente análoga em relação a esse comprimento λ? Se sim, como e qual seria o significado desta nova "frequência"?

2. Conforme consta na literatura, a equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{3}$$

é popularmente conhecida como uma *equação unidimensional de ondas*, sendo v a velocidade de propagação que a apresenta. Nestes termos, como as mesmas funções (1) e (2) do exercício anterior devem modelar duas ondas progressivas:

(a) Ao substituir a função (1) do exercício anterior na equação (3), por exemplo, qual a condição que você obtém para que (1) seja realmente uma solução dessa equação. Aliás, olhando para a transformação de variáveis feita no item **(a)** do exercício anterior, esta é uma condição razoável? Por quê?

(b) E se você substituir, agora, a função (2) do exercício anterior na equação (3), qual será a nova condição? Ela será diferente da anterior?

(c) Com base nos últimos itens, mostre que

$$y\left(x,t\right)=y_1\left(x,t\right)+y_2\left(x,t\right)$$

também é uma solução de (3).

(d) Aliás, lembrando que

$$e^{\pm iz}=\cos\left(z\right)\pm i\sin\left(z\right)\quad , \tag{4}$$

onde z é um parâmetro real, reexpresse as mesmas funções (1) e (2) em termos de exponenciais. Aliás, as novas expressões obtidas também podem ser vistas como soluções da equação (3)? Prove isso.

3. Usando a igualdade (4) do último exercício, e considerando a e b como duas variáveis reais, exprima

$$\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\quad \text{e}\quad \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

em termos de exponenciais, e prove que

$$\sin a+\sin b=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\quad .$$

4. Considere duas ondas progressivas que podem ser representadas por

$$y_1\left(x,t\right)=A\sin\left(kx-\omega t\right)\quad \text{e}\quad y_2\left(x,t\right)=A\sin\left(kx-\omega t+\phi\right) \tag{5}$$

(a) Com base na identidade trigonométrica demonstrada no exercício anterior, obtenha uma expressão para $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$ em termos de

$$y(x,t) = B\sin(kx - \omega t + \phi') \quad .$$

(b) Se considerarmos diferentes valores para a fase original ϕ, é possível dizer que a amplitude B obtida no item anterior se comporta como uma constante? Por quê?

(c) Por efeito do resultado obtido para B, como você definiria a situação onde as ondas $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ se interferem: (i) *construtivamente*; e (ii) *destrutivamente*?

5. Seja uma corda de comprimento inextensível L, que possui uma densidade linear μ que supomos ser constante, e que está **fixa** nas suas extremidades. Conforme o que também está bem posto na literatura, se essa corda for tensionada por uma força de magnitude é F_T, é possível demonstrar que a equação que descreve este sistema físico é dada por

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad .$$

(a) Comparando esta última expressão com a equação (3) do segundo exercício e, portanto, a interpretando como uma equação de ondas unidimensional, qual seria a velocidade de propagação a ela associada?

(b) Uma vez que consideramos **fixas** as extremidades da corda, qual a expressão dos comprimentos λ_n relacionado à onda $y(x,t)$?

(c) De acordo com o resultado obtido no item anterior, qual é a expressão para a frequência de oscilação f_n do sistema?