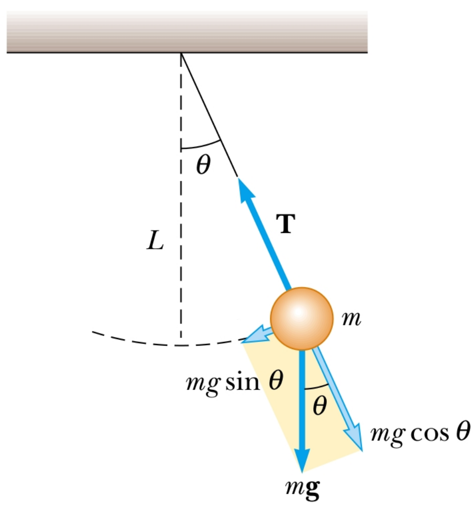
4310277 – Física IV para Química

Primeira lista de exercícios

1. Considere um *pêndulo simples*: ou seja, um sistema físico composto por um objeto com massa m, suspenso por uma das extremidades de um fio inextensível de comprimento L que prende-se a um ponto fixo no espaço, conforme ilustra a figura abaixo. Supondo que as únicas forças que atuam



sobre o objeto são a peso $\vec{P}$ e a de tração $\vec{T}$, não é difícil perceber que a equação que descreve o seu movimento é dada por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad , \tag{1}$$

onde $\theta : [\,0, \infty\,] \to \mathbb{R}$ é a função que descreve o ângulo existente entre o fio e um dos vetores do campo gravitacional durante o tempo de movimento, e g é o módulo da aceleração da gravidade.

Assumindo, por comodidade, que $\omega^2 = g/L$ e que o pêndulo executa pequenas oscilações tais que $\sin\theta \approx \theta$:

(a) Quais os possíveis valores de r que fazem $\theta_r(t) = e^{rt}$ ser uma solução de (1)?

(b) Diante dos resultados r_1 e r_2 obtidos no item anterior, mostre que $\theta(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$ também será uma solução de (1), onde a e b são duas constantes arbitrárias.

(c) Tendo em vista que $e^{\pm ist} = \cos(st) \pm i\sin(st)$, mostre que $\theta_1(t) = \cos(\omega t)$ e $\theta_2(t) = \sin(\omega t)$ também são soluções de (1), assim como $\phi(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, onde A e B são duas constantes.

(d) Usando o fato que as funções seno e cosseno são tais que

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi n) \quad \text{e} \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi n) \quad ,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, use este fato para provar que os períodos associados às oscilações do pêndulo são dados por

$$T_n = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi n\sqrt{\frac{L}{g}} \quad .$$

No caso, $T = T_1$ é o *período fundamental* do pêndulo simples.

2. Seja um sistema *massa-mola*, composto por um objeto de massa m preso na extremidade de uma mola fixa, caracterizada por uma constante elástica k. Desconsiderando quaisquer fatores dissipativos de energia, também é fácil ver que as oscilações desse sistema obedecerão a relação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad , \quad \text{com} \quad \omega^2 = k/m \quad , \tag{2}$$

onde $x : [\,0, \infty\,] \to \mathbb{R}$ é uma função que modela a trajetória do sistema.

Uma vez que, analogamente ao exercício anterior, é possível mostrar que $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ é uma possível solução de (2):

(a) É válido dizer que $x_2(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ também é uma possível solução de (2), se ϕ for uma constante? Por quê?

(b) Esboce os gráficos de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e aponte qual é a diferença entre eles. No caso de ϕ ser um múltiplo natural de 2π, ainda existirá alguma diferença entre eles? Justifique.

(c) Uma vez que o período

$$T_n = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi n\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N} \quad ,$$

associado ao sistema *mede* o tempo que o objeto leva para retornar à sua posição inicial, por exemplo, calcule as frequências f_n com que este retorno ocorre.

(d) Lembrando que ω também pode ser entendida como uma frequência, só que *angular*, qual o relacionamento que existe entre ω e essas f_n? Como você chegou a esta conclusão?

3. Tomando o mesmo sistema massa-mola do exercício anterior, e haja vista que as energias cinética E_C e potencial E_P do objeto clássico são dadas respectivamente por

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{e} \quad E_P = \frac{1}{2}kx^2 \quad , \tag{3}$$

(a) Esboce os gráficos das energias E_C e E_P em função do tempo t, e calcule a energia total E_T deste sistema físico.

(b) Como você chegou ao último resultado? Existe alguma diferença entre os resultados do item anterior se considerarmos, como solução da equação do movimento (2), $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ ou $x_2(t) = A\cos(\omega t + \phi)$? Por quê?

(c) Quais são os valores máximos e mínimos alcançados pelas energias E_C e E_P? É possível afirmar que, além do objeto massivo oscilar, a forma da energia do sistema também oscila? Por quê?

4. Esboce os gráficos das funções

$$g_0(x) = x \quad \text{e} \quad g_a(x) = x + a \quad , \tag{4}$$

onde x é uma variável real e a é uma constante também real.

(a) Qual a diferença que existe entre eles?

(b) E se, ao invés das funções do enunciado, tivéssemos

$$h_0(x,t) = x \quad \text{e} \quad h_v(x,t) = x + vt \quad , \tag{5}$$

com x e t sendo duas variáveis reais, enquanto v é uma constante também real: qual seria a diferença neste caso?

(c) É possível enxergar h_0 em termos de h_v, ou h_v em termos de h_0? Se sim, como?

(d) No caso de tomarmos uma transformação linear, dada por

$$x \mapsto x - vt \quad , \tag{6}$$

seria válido afirmar que $h_v(x,t) = f(x - vt)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Por quê?