# EXERCÍCIO V



POR DEFINIÇÃO, UM OPERADOR $A$ É nilpotente QUANDO, PARA ALGUM $n \in \mathbb{N}$, TEMOS $A^n = 0$

— // —

SEJA $E$ UM ESPAÇO VETORIAL, ONDE $A: E \to E$ É UM OPERADOR NILPOTENTE.

VAMOS CONSIDERAR QUE $K$ É A PRIMEIRA POTÊNCIA DE $A$ QUE É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR NULA: OU SEJA, IREMOS SUPOR QUE $A, A^2, \ldots, A^{k-2}, A^{k-1}$ SÃO NÃO NULAS, MAS $A^k = 0$.

COMO $A^{k-1}$ É, POR EXEMPLO, NÃO NULA, EXISTE UM VETOR $v \in E$ TAL QUE $A^{k-1} v \neq 0$.

TOMANDO (ENTÃO) $u = A^{k-1} v$, TEREMOS COM O USO DE $A$ QUE

$$Au = A(A^{k-1} v) = (A \cdot A^{k-1}) v = A^k v$$

ASSIM, COMO $A^k v = 0$, SEGUE QUE $Au = 0$ ONDE $u = A^{k-1} v \neq 0$.

SE, POR VENTURA, $K=1$, A TRANSFORMAÇÃO $A$ SERÁ IDENTICAMENTE NULO, E QUALQUER VETOR NÃO NULO DE $E$ SERVE.

— // —

# EXERCÍCIO VI



(A) SEJA $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$

SE O NÚCLEO DESSA TRANSFORMAÇÃO DEVE SER A RETA $y = 3x$, DEVEMOS TER QUE

$$A(x,3x) = (ax+3bx, cx+3dx) = (0,0)$$

PARA TODO $x \in \mathbb{R}$. OU SEJA:

$$a+3b = c+3d = 0$$

ASSIM, BASTAR TOMAR $a = -3b$ E $c = -3d$, COM O CUIDADO ADICIONAL DE NÃO ESCOLHÊ-LOS TODOS NULOS POIS, NESSE CASO, O NÚCLEO DE A SERIA O PLANO TODO.

POR EXEMPLO: $A(x,y) = (y-3x, 2y-6x)$

—— // ——

(B) SEJA $A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$

SE A RETA $y = 2x$ DEVE SER A SUA IMAGEM BASTA, POR

EXEMPLO, QUE

- PARA $e_1=(1,0)$ E $e_2=(0,1)$

TANTO $Ae_1=(a,c)$ COMO $Ae_2=(b,d)$ PERTENÇAM À RETA $y=2x$, HAJA VISTA QUE $Ae_1$ E $Ae_2$ GERAM $Im(A)$.

[VALE FRISAR, MAIS UMA VEZ QUE, $(a,c)$ E $(b,d)$ NÃO DEVEM SER AMBOS NULOS!]

COM ESSE RACIOCÍNIO, BASTAR

$$c=2a \quad , \quad e \quad d=2d.$$

POR EXEMPLO: $A(x,y)=(4y-x, 8y-2x)$.

//

# EXERCÍCIO XII



SEJAM $v_1, \ldots, v_n \in X$. COMO $X$ É ORTOGONAL,

$$\langle v_j, v_k \rangle = 0, \text{ SE } j \neq k. \quad (1)$$

SE $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ É UMA COMBINAÇÃO LINEAR NULA DESSES VETORES, TEREMOS QUE

$$\langle \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1, v_j \rangle + \ldots + \langle \alpha_n v_n, v_j \rangle$$

$$= \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = 0.$$

LOGO, POR (1), SEGUIRÁ QUE

$$\alpha \langle v_j, v_j \rangle = \alpha_j |v_j|^2 = 0,$$

POIS TODOS OS PRODUTOS INTERNOS $\langle v_k, v_j \rangle$, COM $k \neq j$, SÃO NULOS. COMO TODOS OS VETORES DE $X$ SÃO NÃO NULOS,

$$\alpha_j |v_j|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0, \text{ PARA TODO } j = 1, \ldots, n.$$

OU SEJA, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ É <u>LI</u>.

# EXERCÍCIO XIII



BASTA VER QUE

$$\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0.$$

COMO $\{u, v, w\}$ É ORTOGONAL (PELO EXERCÍCIO ANTERIOR), ELE É LI.

— // —

# EXERCÍCIO XVII



(A) $\langle u,v\rangle = 1\cdot 1 + 2(-1) + 1\cdot 1 = 1 - 2 + 1 = \underline{\underline{0}}$

$\langle u,w\rangle = 1(-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = \underline{\underline{3}} \neq 0$ ; OU SEJA:

O CONJUNTO NÃO É ORTOGONAL

— // —

(B) $\langle u,v\rangle = a(-b) + ba + c\cdot 0 = -ab + ab = \underline{\underline{0}}$

$\langle u,w\rangle = a(-ac) + b(-bc) + c(a^2+b^2)$

$= -a^2c - b^2c + c(a^2+b^2)$

$= -c(a^2+b^2) + c(a^2+b^2) = \underline{\underline{0}}$

$\langle v,w\rangle = -b(-ac) + a(-bc) + 0(a^2+b^2)$

$= abc - abc = \underline{\underline{0}}$

$\therefore$ O CONJUNTO É ORTOGONAL.

PARA SER ORTONORMAL, PRECISAMOS TER:

$$|u|^2 = a^2+b^2+c^2 = \underline{\underline{1}},$$ ①

$$|v|^2 = b^2+a^2 = \underline{\underline{1}},$$ E ②

$$|w|^2 = a^2c^2+b^2c^2+(a^2+b^2)^2 = \underline{\underline{1}};$$ ③

POR ① E ②, VEMOS QUE ISSO SÓ PODE OCORRER SE $c=0$. OU SEJA, COM

$$u=(a,b,0),\ v=(-b,a,0),\ \text{E}\ w=(0,0,1)$$

— // —

(c) $$\langle u,v\rangle = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{6}{49}+\frac{12}{49}-\frac{18}{49}=0$$

$$\langle u,w\rangle = \frac{2}{7}\cdot\frac{6}{7}+\frac{6}{7}\left(-\frac{3}{7}\right)+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{12}{49}-\frac{18}{49}+\frac{6}{49}=0$$

$$\langle v,w\rangle = \frac{3}{7}\cdot\frac{6}{7}+\frac{2}{7}\left(-\frac{3}{7}\right)-\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{18}{49}-\frac{6}{49}-\frac{12}{49}=0$$

ISSO MOSTRA A ORTOGONALIDADE DO CONJUNTO.
NO ENTANTO, ESSE CONJUNTO É ORTONORMAL: BASTA VER QUE:

$$|u|^2 = \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} + \frac{36}{49} + \frac{9}{49} = 1,$$

$$|v|^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{36}{49} = 1, \text{ e}$$

$$|w|^2 = \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} + \frac{9}{49} + \frac{4}{49} = 1$$

—— // ——

EXERCÍCIO XVIII



(A) PARA QUE $a=(1+m,2)$ E $b=(3,m-1)$ SEJAM ORTOGONAIS,

DEVEMOS TER $\langle a,b\rangle=0$.

ASSIM, PELA DEFINIÇÃO DADA DE PRODUTO INTERNO, ESSA

CONDIÇÃO REDUZ-SE A:

$$(1+m)2+2\cdot 3(m-1)-(1+m)(m-1)-3\cdot 2$$
$$=2+2m+6m-6-m^2+1-6$$
$$=-m^2+8m-9=0 \Rightarrow m^2-8m+9=0 \quad (1)$$

OBSERVANDO QUE

$$m^2-8m+9=(m-4-\sqrt{7})(m-4+\sqrt{7}),$$

VEMOS QUE A IGUALDADE (1) É SATISFEITA SE

$$m=4+\sqrt{7} \quad \text{OU} \quad m=4-\sqrt{7}$$

—— // ——

(B) SEJA $u=(x,y)$ E ESPECIFICAMENTE $v=(2,1)$

PARA QUE U E V SEJAM ORTOGONAIS, DEVEMOS TER

$$\langle u, v \rangle = xy + 4 - x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow xy - 2y = (x-2)y = x - 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{x-4}{x-2}$$

OU SEJA, TODOS OS VETORES $v = \left(x, \frac{x-4}{x-2}\right)$, ONDE X ASSU-

ME QUALQUER VALOR REAL, SÃO ORTOGONAIS A (2,1).

---

(c) SEGUNDO O ENUNCIADO A NORMA DE $w = (m, m-1)$ É

DADA POR

$$|w|^2 = \sqrt{m(m-1) + 2m(m-1) - m(m-1) - m(m-1)}$$

$$= \sqrt{m(m-1)} \quad , \text{E}$$

PARA QUE ELA SEJA IGUAL À UNIDADE, FAZ-SE NECESSÁRIO QUE

$$m(m-1) = m^2 - m = 1$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 1 = 0 \qquad (2)$$

Como

$$m^2 - m - 1 = \left(m - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(m - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right),$$

A igualdade (2) é satisfeita se

$$m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad m = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, os vetores procurados são

$$w_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \text{ e}$$

$$w_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

//

## EXERCÍCIO IXX

IXX . 1/2

A NORMA DO VETOR V É DADA POR

$$|v| = \sqrt{n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2} \quad (1)$$

Como

$$n^2 + (n+1)^2 = (-n)^2 + (n+1)^2 + 2n(n+1) - 2n(n+1)$$

$$= [(n+1)^2 - 2n(n+1) + (-n)^2] + 2n(n+1)$$

$$= [(n+1) - n]^2 + 2n(n+1)$$

$$= 1 + 2n(n+1),$$

TEMOS QUE

$$n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 = 1 + 2n(n+1) + (n(n+1))^2$$

$$= (1 + n(n+1))^2 .$$

SUBSTITUINDO ESSE FATO EM (1) SEGUE QUE:

IXX. 2/2

$$|v| = \sqrt{(1+n(n+1))^2} = (1+n(n+1))$$

$$= n^2+n+1$$

QUE É UM NÚMERO NATURAL

—— // ——

# EXERCÍCIO XX



SEJA $w = |u|v + |v|u$, E TOMEMOS POR $\alpha$ E $\beta$ OS RESPECTIVOS ÂNGULOS QUE $w$ FORMA COM OS VETORES $u$ E $v$.

COMO

$$\cos\alpha = \frac{\langle w, u\rangle}{|w||u|} \quad (1), \quad \cos\beta = \frac{\langle w, v\rangle}{|w||v|}$$

NOTA-SE QUE

$$\cos\alpha = \frac{|u|\langle v, u\rangle + |v|\langle u, u\rangle}{|w||u|} = \frac{|u|\langle v, u\rangle + |v||u|^2}{|w||u|}$$

$$= \frac{\langle u, v\rangle + |v||u|}{|w|}, \text{ E}$$

$$\cos\beta = \frac{|u|\langle v, v\rangle + |v|\langle u, v\rangle}{|w||v|} = \frac{|u||v|^2 + |v|\langle u, v\rangle}{|w||u|}$$

$$= \frac{\langle u, v\rangle + |v||u|}{|w|}$$

OU SEJA, $\cos\alpha = \cos\beta$ E $\alpha = \beta$.

LOGO $\omega$ ESTÁ CONTIDO NA BISSETRIZ MENCIONADA NO ENUNCIADO.

— // —