# EXERCÍCIO I

Axiomas de adição

1) $\underline{\underline{x+y}} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)$

$= (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = (y_1+x_1, \dots, y_n+x_n)$

$= (y_1, \dots, y_n) + (x_1, \dots, x_n) = \underline{\underline{y+x}}$

(2) $\underline{\underline{x+(y+z)}} = (x_1, \dots, x_n) + ((y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n))$

$= (x_1, \dots, x_n) + (y_1+z_1, \dots, y_n+z_n)$

$= (x_1+(y_1+z_1), \dots, x_n+(y_n+z_n))$

$= ((x_1+y_1)+z_1, \dots, (x_n+y_n)+z_n)$

$= (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) + (z_1, \dots, z_n)$

$= ((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) + (z_1, \dots, z_n)$

$= \underline{\underline{(x+y)+z}}$

(3) O VETOR NULO É $0 = (0, \ldots, 0)$, AFINAL

$$\underline{\underline{x + 0}} = (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) = (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0)$$
$$= (x_1, \ldots, x_n) = \underline{\underline{x}}$$

COMO $0$ É UM ELEMENTO DO $\mathbb{R}^n$, VALE (1), OU SEJA

$$x + 0 = \underline{\underline{0 + x}} = \underline{\underline{x}}$$

(4) O INVERSO ADITIVO DE $x$ É $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$, POIS

$$\underline{\underline{x + (-x)}} = (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n)$$
$$= (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n))$$
$$= (0, \ldots, 0) = \underline{\underline{0}}$$

---

AXIOMAS DE MULTIPLICAÇÃO

(5) PARA $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, TEMOS

$$\underline{\underline{(\alpha\beta)x}} = (\alpha\beta)(x_1, \ldots, x_n) = ((\alpha\beta)x_1, \ldots, (\alpha\beta)x_n) \underline{\underline{*}}$$

$$\overset{*}{=} (\alpha(\beta x_1), \dots, \alpha(\beta x_n)) = \alpha(\beta x_1, \dots, \beta x_n)$$

$$= \alpha(\beta(x_1, \dots, x_n)) = \underline{\underline{\alpha(\beta x)}}$$

(6) $\underline{\underline{(\alpha+\beta)x}} = (\alpha+\beta)(x_1, \dots, x_n)$

$$= ((\alpha+\beta)x_1, \dots, (\alpha+\beta)x_n)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \dots, \alpha x_n + \beta x_n)$$

$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n)$$

$$= \alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(x_1, \dots, x_n)$$

$$= \underline{\underline{\alpha x + \beta x}}$$

(7) $\underline{\underline{\alpha(x+y)}} = \alpha((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n))$

$$= \alpha(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$= (\alpha(x_1 + y_1), \dots, \alpha(x_n + y_n))$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n)$$

$$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n) \overset{*}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \alpha(x_1,\dots,x_n) + \alpha(y_1,\dots,y_n)$$

$$= \alpha x + \alpha y$$

(8) $1x = 1(x_1,\dots,x_n) = (1\cdot x_1,\dots,1\cdot x_n)$

$$= (x_1,\dots,x_n) = x$$

— // —

OU SEJA: $\mathbb{R}^n$ É UM ESPAÇO VETORIAL

— // —

# EXERCÍCIO IV



(A) Com efeito da igualdade $w+u=w+v$, temos que

$$\underline{u} = 0+u \quad \leftarrow \text{EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NULO}$$
$$= (-w+w)+u \quad \leftarrow \text{EXISTÊNCIA DO ELEMENTO OPOSTO}$$
$$= -w+(w+u) \quad \leftarrow \text{COMUTATIVIDADE}$$
$$= -w+(w+v)$$
$$= (-w+w)+v$$
$$= 0+v$$
$$= \underline{v}$$

Assim,

(i) $\underline{w+u=w} \Rightarrow w+u=w+0$. Logo $\underline{u=0}$.

(ii) $\underline{w+u=0} \Rightarrow w+u=w+(-w)$. Logo $\underline{u=-w}$

(B) $v = 1 \cdot v$ ← EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO

$= (1+0) \cdot v$

$= 1 \cdot v + 0 \cdot v$ ← DISTRIBUTIVA

$= v + 0 \cdot v$

COMO EXISTE $0$ TAL QUE

$$v + 0 = v \quad ,$$

O RESULTADO OBTIDO EM (A) PERMITE OBSERVAR QUE

$$v + 0 \cdot v = v + 0 \Rightarrow 0 \cdot v = 0$$

DE MODO ANÁLOGO, COMO

$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0)$ ← DISTRIBUTIVA

$= \alpha \cdot 0$

$= \alpha \cdot 0 + 0$ ← $\exists$ DO ELEMENTO NULO

TEMOS QUE $\alpha \cdot 0 = 0$

(c) Como $\alpha \neq 0$, temos que

$$v = 1 \cdot v \leftarrow \exists \text{ do elemento neutro}$$
$$= (\alpha^{-1} \cdot \alpha) v$$
$$= \alpha^{-1} \cdot (\alpha v) \leftarrow \text{associativa}$$

Se, por ventura, valesse $\alpha \cdot v = 0$, teríamos

$$v = \alpha^{-1} \cdot (\alpha v) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$$

Ou seja, $v = 0$ e isso fere a hipótese.

Logo, $\underline{\alpha \cdot v \neq 0}$

(d) Sabendo que

$$n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ vezes}}$$

IV, 4/4

VEMOS QUE

$$n \cdot v = (1+1+\dots+1)\cdot v$$

$$= 1v + 1v + \dots + 1v \leftarrow \text{DISTRIBUTIVA}$$

$$= v + v + \dots + v \leftarrow \exists \text{ DO ELEMENTO NEUTRO}$$

—— // ——

# EXERCÍCIO VI



V SER MÚLTIPLO DE U SIGNIFICA QUE

$$V = \alpha U \quad , \text{PARA ALGUM } \alpha \in \mathbb{R}$$

PELAS EXPRESSÕES DE U E V, TEMOS ASSIM QUE

$$(c, d) = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

OU SEJA, $c = \alpha a$

$d = \alpha b$

MULTIPLICANDO A PRIMEIRA IGUALDADE POR $b$, E A SEGUNDA POR $a$, OBTEMOS

$$bc = \alpha ab \quad \text{E} \quad ad = \alpha ab$$

LOGO $ad = bc \Rightarrow ad - bc = 0$

ISSO TUDO DEMONSTRA A NECESSIDADE

PARA DEMONSTRAR A SUFICIÊNCIA, DEVEMOS PARTIR DO FATO QUE $ad = bc$ E VER ONDE ISSO VAI DAR!

ENTÃO... SEJA $ad = bc$.

(i) SUPONDO QUE $a \neq 0$, OBTEMOS

$$\underline{\underline{d}} = 1 \cdot d = (a^{-1} \cdot a) d = a^{-1}(ad) = a^{-1}(bc) = \underline{\underline{\left(\frac{c}{a}\right) b}}$$

$$\underline{\underline{c}} = 1 \cdot c = (a^{-1} a) c = \underline{\underline{\left(\frac{c}{a}\right) a}}$$

LOGO, PONDO $\alpha = \dfrac{c}{a}$, VEM QUE

$$d = \alpha b \quad \text{E} \quad c = \alpha a$$

OU SEJA, $(c, d) = (\alpha a, \alpha b) = \alpha (a, b) \Rightarrow v = \alpha u$

(ii) SUPONDO QUE $b \neq 0$, OBTEMOS

$$c = (b^{-1} \cdot b)c = b^{-1} \cdot (bc) = b^{-1}(ad) = \left(\frac{d}{b}\right)a$$

$$d = 1 \cdot d = (b^{-1} \cdot b)d = \left(\frac{d}{b}\right)b$$

LOGO, PONDO $\alpha = \dfrac{d}{b}$, VEM QUE

$$c = \alpha a \quad \text{E} \quad d = \alpha b$$

OU SEJA, MAIS UMA VEZ $v = \alpha u$

—— // ——

# EXERCÍCIO VII



(A) (1) $0 = (0,0,0) \in W$

(2) SEJAM $u = (0, y_1, z_1)$ E $v = (0, y_2, z_2)$ PERTENCENTES A $W$. TEMOS

$$u + v = (0, y_1, z_1) + (0, y_2, z_2)$$
$$= (0+0, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$= (0, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

ENTÃO $u + v \in W$

(2) SEJA $u = (0, y, z)$ E $\alpha \in \mathbb{R}$. COMO:

$$\alpha u = \alpha (0, y, z) = (\alpha \cdot 0, \alpha y, \alpha z) = (0, \alpha y, \alpha z),$$

LOGO $\alpha u \in W$.

---

MORAL DA HISTÓRIA: $W$ É SUBESPAÇO DO $\mathbb{R}^3$

---

(B) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}\}$ NÃO É SUBESPAÇO VETORIAL DE $\mathbb{R}^3$, POIS PARA

$x \in \mathbb{Z}$ E $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha x \notin \mathbb{Z}$$

OU SEJA, PARA UM $u = (x, y, z)$

$\alpha u = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \notin W$

---

(C) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y$ É IRRACIONAL$\}$ NÃO É SUBESPAÇO VETORIAL DE $\mathbb{R}^3$. PARA VER ISSO, PODEMOS NOTAR QUE A SOMA DE DOIS NÚMEROS IRRACIONAIS NEM SEMPRE É UM NÚMERO IRRACIONAL: BASTA TOMAR

$a = \sqrt{2}$ E $b = -\sqrt{2}$

$(a + b = 0$, E $0$ É UM RACIONAL$)$

OU SEJA, PARA $u = (x_1, y_1, z_1)$ E $v = (x_2, y_2, z_2)$

$$u+v=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$$
$$=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

NÃO PERTENCERÁ NECESSARIAMENTE A $W$.

// 

# EXERCÍCIO IX

IX . 1/1

FATO: TODOS OS ELEMENTOS DA FORMA $\alpha v$, COM $\alpha \in \mathbb{R}$ E $v \in E$, PERTENCEM A $F$

---

(1) COMO $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$, VEMOS QUE $0 \cdot v = 0 \in F$.

(2) SEJAM $u = \alpha v$ E $w = \beta v$ PERTENCENTES A $F$. COMO

$$u + w = \alpha v + \beta v = (\alpha + \beta) v$$

E $\alpha + \beta$ É UM NÚMERO REAL, SEGUE QUE $u + w \in F$

(3) SEJAM $u = \alpha v \in F$ E $\lambda \in \mathbb{R}$. ENTÃO

$$\lambda u = \lambda (\alpha v) = (\lambda \alpha) v$$

COMO $\lambda \alpha \in \mathbb{R}$, TEMOS QUE $\lambda u \in F$

---

OU SEJA, $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$ É UM SUBESPAÇO VETORIAL.

# EXERCÍCIO XII



DEMONSTRAR QUE (A) E (B) SÃO EQUIVALENTES É O MESMO QUE DIZER QUE A AFIRMAÇÃO (A) LEVA A (B), E VICE-VERSA.

—— // ——

PROVEMOS QUE $(A) \Rightarrow (B)$

COMO $F = F_1 \oplus F_2$, TEMOS NECESSARIAMENTE QUE

$$F_1 \cap F_2 = \{0\}$$

TOMEMOS $v_1 \in F_1$ E $v_2 \in F_2$ TAIS QUE UM $w \in F$ PODE SER EXPRESSO COMO

$$w = v_1 + v_2 \qquad (1)$$

PARA AVALIAR A UNICIDADE DESSA EXPRESSÃO, PODEMOS SUPOR QUE TAMBÉM EXISTEM $u_1 \in F_1$ E $u_2 \in F_2$ TAIS QUE

$$w = u_1 + u_2 \qquad (2)$$

E VER O QUE ISSO VAI DAR.

POR (1) E POR (2), TEMOS QUE

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \quad (3)$$

E DISSO VEM QUE

$$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \quad (4)$$

Como:

(i) $u_1, v_1 \in F_1$, TEMOS QUE $u_1 - v_1 \in F_1$

(ii) $u_2, v_2 \in F_2$, TEMOS QUE $v_2 - u_2 \in F_2$

ENTRETANTO, DEVIDO A IGUALDADE (4),

$$u_1 - v_1 \in F_2 \quad \text{e} \quad v_2 - u_2 \in F_1$$

(AFINAL ESSAS COMBINAÇÕES SÃO IGUAIS).

CONFORME JÁ FOI ALERTADO ACIMA, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$; E ISSO SIGNIFICA AUTOMATICAMENTE QUE

$$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 = 0$$

ASSIM, TEMOS QUE

$$u_1 - v_1 = 0 \Rightarrow u_1 = v_1 \text{ , E}$$

$$v_2 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = v_2$$

OU SEJA, A EXPRESSÃO DE $w$ É ÚNICA.

— // —

PROVEMOS QUE (B) => (A)

SEJA $v \in F_1 \cap F_2$.

COMO $v = v + 0 = 0 + v$, TEMOS QUE

$$0, v \in F_1 \quad \text{E} \quad v, 0 \in F_2 .$$

NO ENTANTO, PELA HIPÓTESE (B), ISSO IMPLICA QUE

$$0 = v$$

LOGO $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

# EXERCÍCIO XIII



SEJA $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

PARA QUE $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$, TODO $(x,y)$ PODE SER ESCRITO COMO UM MÚLTIPLO DE $U=(1,2)$ MAIS UM MÚLTIPLO DE $V$. OU SEJA

$$(x,y) = a(1,2) + b(-1,2), \text{ COM ALGUM } a,b \in \mathbb{R}.$$

DESENVOLVENDO ESSA IGUALDADE, TEMOS QUE

$$(x,y) = (a,2a) + (-b,2b) = (a-b, 2a+2b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = x \\ 2a+2b = y \end{cases}$$

TRATA-SE DE UM SISTEMA COMPATÍVEL ~~DE~~ DETERMINADO, ONDE

$$a = \frac{2x+y}{4} \quad \text{E} \quad b = \frac{y-2x}{4}$$

E ISSO IMPLICA QUE $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$.

PARA VER QUE TRATA-SE DE UMA SOMA DIRETA, BASTA NOTAR QUE U E V NÃO SÃO MÚLTIPLOS UM DO OUTRO: ISSO SEGUE DO EXERCÍCIO VI.

DESSA MANEIRA, SEGUE QUE AS RETAS $F_1$ E $F_2$ TÊM COMO INTERSECÇÃO APENAS A ORIGEM (OU SEJA, OS SUBESPAÇOS $F_1$ E $F_2$ POSSUI APENAS O ELEMENTO NULO EM COMUM).

—— // ——

MORAL DA HISTÓRIA: $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$

—— // ——

# EXERCÍCIO XIV



(A) NESSE CASO $(x, y, z) \in U$ SE, E SOMENTE SE,

$$x - 2y = 0 \iff x = 2y$$

ISSO SIGNIFICA QUE $(x, y, z) \in U$ É TAL QUE

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = (2y, y, 0) + (0, 0, z)$$
$$= y(2, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

ASSIM $\{(2,1,0), (0,0,1)\}$ É UM CONJUNTO DE GERADORES DE $U$

---

(B) AQUI, $(x, y, z) \in V$ SE, E SOMENTE SE,

$$x + z = 0 \iff z = -x$$
$$x - 2y = 0 \iff 2y = x \iff y = x/2$$

~~OU SEJA,~~ [illegible]

ASSIM, PARA QUE $(x, y, z) \in V$ DEVEMOS TER:

$$(x, y, z) = (x, x/2, -x) = \frac{x}{2}(2, 1, -2)$$

O QUE FAZ DE $\{(2,1,-2)\}$ O CONJUNTO GERADOR DE $W$

—— // ——

(c) PARA QUE $(x,y,z) \in W$, DEVEMOS TER

$$x + 2y - 3z = 0 \iff x = 3z - 2y$$

ISSO QUER DIZER QUE, SE $(x,y,z) \in W$, VALE QUE

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (3z-2y, y, z) = (3z, 0, z) + (-2y, y, 0) \\ &= z(3,0,1) - y(2,-1,0)\end{aligned}$$

OU SEJA, $\{(3,0,1),(2,-1,0)\}$ É UM CONJUNTO DE GERADORES DE $W$

—— // ——