MAT 3211 – Álgebra Linear

Quinta lista de exercícios

1. Quais das seguintes aplicações de R^3 em R^2 comportam-se como operadores lineares?

(a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$

(b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$

(c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$

(d) $F_4(x, y, z) = \left(2x^2 + 3y, x, z\right)$

2. Sejam E, F e G espaços vetoriais, $A, B : E \to F$ e $C : F \to G$ transformações lineares, e α um número real. Mostre que

(a) αA,

(b) $A + B$, e

(c) CA

também são transformações lineares.

3. Considere que a expressão geral de um operador linear $A : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ é dada por $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Determine as constantes a, b, c e d, de modo que A transforme os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (3, 4)$ nos vetores $Au = (1, 1)$ e $Av = (2, 2)$.

4. Determine, para cada uma das transformações lineares listadas abaixo, uma base e consequente dimensão para os núcleo e imagem.

(a) $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, dada por $F(x, y, z) = x + y - z$

(b) $F : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$

(c) $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^4$, dada por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$

5. Sejam E um espaço vetorial e $A : E \to E$ um operador nilpotente. Mostre que existe algum vetor não nulo em E, tal que $Av = 0$.

6. Determine os valores de a b, c e d para que o operador $A : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, dado especificamente por $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, tenha

(a) como núcleo a reta $y = 3x$, e

(b) a reta $y = 2x$ como imagem.

7. Escreva a expressão de um operador $A : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ cujo núcleo seja a reta $y = x$, enquanto a sua imagem seja $y = 2x$.

8. Mostre que para a transformação linear $A : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$, definida especificamente por $A(x, y, z) = (x, y)$, a transformação também linear $B : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ dada por $B(x, y) = (x, y, ax + by)$, com a e b sendo números reais, comporta-se como a sua inversa à direita. Ou seja, que BA é o operador identidade $I : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$.

9. Considere as retas F_1 e F_2 definidas no R^2, definidas respectivamente pelas equações $y = ax$ e $y = bx$ (com $a \neq b$).

(a) Exprima cada vetor $v = (x, y) \in \mathrm{R}^2$ como a soma de um vetor em F_1 e outros em F_2.

(b) Obtenha a matriz (em relação a base canônica) da projeção $P : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, que tem F_1 como núcleo e F_2 como imagem.

(c) Ache a matriz da reflexão $S : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, em torno da reta F_1, paralelamente a F_2.

10. Exprima um vetor arbitrário $v = (x, y, z) \in \mathrm{R}^3$ como a soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x + y - z = 0$, com um vetor da reta F_2, gerada pelo vetor $(1, 2, 1)$. Conclua que $\mathrm{R}^3 = F_1 \oplus F_2$, e determine a matriz (relativa a base canônica) da projeção $P : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$, a qual possui F_1 como imagem e F_2 como núcleo.

11. Prove que o operador $P : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, dado por $P(x, y) = \left(-2x - 4y, \frac{3}{2}x + 3y\right)$ é a projeção sobre uma reta. Determine o núcleo e a imagem de P.

12. Prove que num espaço vetorial E munido com um produto interno, todo conjunto ortogonal X de vetores não nulos é linearmente independente.

13. Tomando o resultado do exercício anterior, calcule três produtos internos entre os vetores $u = (1, 0, -1)$, $v = (4, 1, 4)$ e $w = (-3, 24, -3)$, e conclua que esses vetores são linearmente independentes.

14. Seja X um conjunto de geradores do espaço vetorial E, onde está definido um produto interno. Se dois vetores u e v nesse espaço são tais que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para qualquer $w \in X$, prove que $u = v$.

15. Seja E um espaço vetorial Euclideano, para o qual $\{e_1, \ldots, e_n\}$ serve como uma base. Considerando uma matriz quadrada A, cujos elementos são dados por $a_{jk} = \langle e_j, e_k\rangle$, mostre que:

(a) A é uma matriz simétrica; e

(b) se $u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ e $v = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, então o produto escalar em E pode ser expresso, sob o prisma matricial, como

$$\langle u, v\rangle = (x_1, \ldots, x_n)\, A\, (y_1, \ldots, y_n)^T \quad .$$

16. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ dois vetores arbitrários do R^2, e

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

uma matriz com elementos reais. Definindo $\langle u, v\rangle = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{22}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$, mostre que:

(a) o produto assim definido satisfaz as duas primeiras condições que definem um produto interno; e

(b) a condição (c) da definição de produto interno é válida se, e somente se, M é simétrica.

Aliás, no que diz respeito à matriz M,

(c) quais restrições que devem ser a ela impostas para que o produto acima definido identifique-se com o usual do R^2?

17. Em cada um dos casos abaixo, determine se o conjunto $\{u, v, w\} \subset \mathrm{R}^3$ é ortonormal, apenas ortogonal, ou nenhum dos dois.

(a) $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, e $w = (-1, 1, 2)$

(b) $u = (a, b, c)$, $v = (-b, a, 0)$, e $w = \left(-ac, -bc, a^2 + b^2\right)$

(c) $u = \frac{1}{7}(2, 6, 3)$, $v = \frac{1}{7}(3, 2, -6)$, e $w = \frac{1}{7}(6, -3, 2)$

18. Considerando como um produto interno no R^2 o relacionamento não usual, dado por

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \quad ,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, determine:

(a) m a fim de que os vetores $(1 + m, 2)$ e $(3, m - 1)$ sejam ortogonais;

(b) todos os vetores do R^2 ortogonais a $(2, 1)$; e

(c) todos os vetores $(m, m - 1)$ com norma igual a 1.

19. Mostre que, para todo número natural n, a norma do vetor $v = (n, n + 1, n(n + 1)) \in \mathrm{R}^3$ é um número natural.

20. Sejam u e v dois vetores linearmente independentes do R^2. Prove que o vetor $|u|v + |v|u$ está contido na bissetriz do ângulo formado por u e v.

21. Dado o produto interno $\langle u, v\rangle$ no espaço vetorial E, mostre que a igualdade

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$$

vale para quaisquer $u, v \in E$. Aliás, também interprete-a geometricamente.

22. Determinar uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços do R^4, utilizando o processo de Gram-Schimdt.

(a) $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$

(b) $W = [(2, 0, 0, 0), (1, 3, 3, 0), (3, -3, -3, 0)]$

(c) $W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathrm{R}^4 : x - y = 0\right\}$

(d) $W = \left\{(x, y, z, t) \in \mathrm{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\right\}$

23. Considere os vetores $u = (2, 2, 2)$ e $v = (3, 3, 1)$ do R^3.

(a) Determine dos vetores v_1 e v_2, tais que

$$v = v_1 + v_2 \quad ,$$

sendo v_1 ortogonal a u e $v_2 = \lambda u$, onde λ é um número real.

(b) Tomando $w = (-5, 1, -1)$, decomponha v numa parcela de $W = [u, w]$ e noutra de $W^{\perp}$.

(c) Determine uma base ortonormal de W.

24. Determine $m \in \mathrm{R}$ a fim de que o operador linear

$$F\left(x, y, z\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + mz, -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)$$

seja uma isometria.