MAT 3211 – Álgebra Linear

Terceira lista de exercícios

1. Quais dos subconjuntos do R^3 listados abaixo podem ser considerados como linearmente independentes?

(a) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (2,3,5)\}$

(b) $\{(1,1,1), (1,0,1), (1,0,-2)\}$

(c) $\{(0,0,0), (1,2,3), (4,1,-2)\}$

(d) $\{(1,1,1), (1,2,1), (3,2,-1)\}$

2. Quais dos subconjuntos do $\mathcal{P}_4$ listados abaixo podem ser considerados como linearmente independentes?

(a) $\left\{1\ ,\ x-1\ ,\ x^2+2x+1\ ,\ x^2\right\}$

(b) $\left\{2x\ ,\ x^2+1\ ,\ x+1\ ,\ x^2-1\right\}$

(c) $\left\{x\,(x-1)\ ,\ x^3\ ,\ 2x^3-x^2\ ,\ x\right\}$

(d) $\left\{x^4+x-1\ ,\ x^3-x+1\ ,\ x^2-1\right\}$

3. Determinar os valores de m e n para que os conjuntos de vetores do R^3 dados abaixo sejam linearmente independentes.

(a) $\{(3,5m,1), (2,0,4), (1,m,3)\}$

(b) $\{(1,3,5), (2,m+1,10)\}$

(c) $\{(6,2,n), (3,m+n,m-1)\}$

4. Sejam $v_1,\ldots,v_m$ vetores não nulos num espaço vetorial E. Demonstre que, se nenhum deles é combinação linear dos anteriores, o conjunto $X=\{v_1,\ldots,v_m\}$ é linearmente independente.

5. Prove que $\{1\ ,\ e^x\ ,\ e^{2x}\ ,\ e^{3x}\ ,\ e^{4x}\}$ é um conjunto linearmente independente no espaço $C^\infty(\mathrm{R})$ (sugestão: dada uma combinação linear nula, derive-a em relação a x, divida o resultado por e^x, e prossiga com o mesmo raciocínio).

6. Mostre que os polinômios $1\ ,\ x-1\ ,\ x^2-3x+1$ formam uma base para $\mathcal{P}_2$. Por consequência, exprima o polinômio $2x^2-5x+6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

7. Mostre que os vetores $u=(1,1)$ e $v=(-1,1)$ formam uma base para R^2 e exprima, cada um dos vetores $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$, por meio de uma combinação linear dos elementos dessa base.

8. Encontre não apenas uma base, mas a dimensão dos seguintes subespaços do R^4:

(a) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathrm{R}^4 : x-y=0 \text{ e } x+2y+t=0\}$

(b) $V=\{(x,y,z,t)\in\mathrm{R}^4 : x-y=y \text{ e } x-3y+t=0\}$

9. Considere o hiperplano

$$H=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{R}^n : a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0\}\quad ,$$

onde os coeficientes $a_1,\ldots,a_n$ são números reais não nulos. Prove que H é um subespaço vetorial de dimensão $n-1$ dentro do R^n, e encontre uma base para esse subespaço.

10. Sejam u e v vetores linearmente independentes de um espaço vetorial E. Dado $\alpha\neq 0$, prove que o conjunto de dois elementos $\{v,v+\alpha u\}$ é uma base do subespaço gerado pelos vetores $v,v+\alpha u,v+2u,\ldots,v+nu,\ldots$.

11. As matrizes quadradas T de ordem n, cujos elementos t_{jk} (com $1\leqslant j,k\leqslant n$) são nulos quando $j<k$, são chamadas *triangulares inferiores*. Prove que elas constituem um subespaço vetorial $L\subset \mathrm{M}(n\times n)$, obtenha uma base para L, e determine a sua dimensão.

12. Determinar não apenas uma base, mas a dimensão do espaço solução de cada um dos seguintes sistemas lineares homogêneos listados abaixo:

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 3y + 4z = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$

13. Determinar as coordenadas do vetor $u = (4, -5, 3) \in \mathrm{R}^3$ em relação as seguintes bases:

(a) $\{(1,1,1), (1,2,0), (3,1,0)\}$

(b) $\{(1,2,1), (0,3,2), (1,1,4)\}$

14. Sejam $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ duas bases do R^3, tais que

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 &= 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 &= 3e_1 + e_3 \end{aligned}$$

(a) Determine as matrizes de mudança:

- da base E para a base G; e
- da base G para a base E.

(b) Se um vetor $u \in \mathrm{R}^3$ possui coordenadas 1, 2 e 3 em relação à base E, quais são as coordenadas do mesmo vetor em relação à base G?