MAT 3211 – Álgebra Linear

Segunda lista de exercícios

1. Mostre que o $\mathbb{R}^n$ (espaço Euclideano com n dimensões), cujos elementos são as listas ordenadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de números reais, com as respectivas operações de soma e de multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definidas por

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \quad ,$$

é um espaço vetorial.

2. Mostre que o conjunto $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, que contém todas as matrizes A com m linhas e n colunas, cujos elementos são os números reais a_{jk} (onde $1 \leqslant j \leqslant m$ e $1 \leqslant k \leqslant n$), e para as quais estão definidas

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = [a_{jk} + b_{jk}] \quad \text{e} \quad \alpha \cdot \mathsf{A} = [\alpha a_{jk}]$$

como as respectivas operações de adição e de multiplicação por um escalar, é um espaço vetorial.

3. Considere o conjunto $V = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ munido das operações

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad , \quad \alpha\,(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad .$$

Podemos afirmar que V é um espaço vetorial? Por quê?

4. De acordo com os axiomas que definem um espaço vetorial E qualquer, demonstre as seguintes afirmações.

(a) Sejam $u, v, w \in E$, tais que $w + u = w + v$. Então $u = v$.

Em particular: se $w + u = w$, logo $u = 0$; e

se $w + u = 0$, segue que $u = -w$.

(b) Dados $0 \in \mathbb{R}$ e $v \in E$, temos que $0 \cdot v = 0 \in E$.

Analogamente, dados um número real α e um $0 \in E$, valerá que $\alpha \cdot 0 = 0$.

(c) Se α for um número real não nulo, assim como $v \in E$, então $\alpha \cdot v \neq 0$.

(d) Se $v \in E$ e n é um número natural, então $n \cdot v = v + \ldots + v$ (n parcelas).

5. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, com as suas usuais operações de soma e multiplicação, pode ser interpretado como um espaço vetorial? Por quê?

6. Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ vetores em $\mathbb{R}^2$ com $u \neq 0$. Mostre que para v ser múltiplo de u é necessário e suficiente que $ad - cb = 0$.

7. Quais dos conjuntos W abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^3$?

(a) $W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\big\}$.

(b) $W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Z}\big\}$.

(c) $W = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \text{ é irracional } \}$.

8. Mostre que todo subespaço vetorial é, em si mesmo, um espaço vetorial.

9. Seja $v \in E$, onde E é um espaço vetorial. Mostre que o conjunto $F = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{R}\}$, com todos os múltiplos de v, é um subespaço vetorial de E.

10. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais. Mostre que o conjunto H de todos os vetores $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tais que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \quad ,$$

é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$.

11. Sejam os subespaços do $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) : x = z\} \quad , \\ V &= \{(x, y, z) : x = y = 0\} \quad , \\ W &= \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \quad . \end{aligned}$$

Verifique que:

(a) $U + V = \mathbb{R}^3$

(b) $U + W = \mathbb{R}^3$

(c) $V + W = \mathbb{R}^3$

Em algum dos casos a soma é direta?

12. Sejam F, F_1 e F_2 subespaços vetoriais de E, com $F_1 \subset F$ e $F_2 \subset F$. Demonstre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $F = F_1 \oplus F_2$

(b) Todo elemento $w \in F$ se escreve, de modo único, como a soma $w = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in F_1$ e $v_2 \in F_2$.

13. Dados $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 2)$, sejam F_1 e F_2 as respectivas retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e contém u e v. Mostre que $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

14. Dar um sistema de geradores para cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

(a) $U = \{(x, y, z) : x - 2y = 0\}$

(b) $V = \{(x, y, z) : x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$

(c) $W = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0\}$

15. Verifique se as matrizes abaixo geram o espaço vetorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

16. Mostre que os dois conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.