

MAT3211 - Álgebra Linear

Lista 1

1. Resolva os sistemas abaixo por escalonamento e escreva as soluções na forma paramétrica:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 6y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

2. Determine os valores de a e b que tornam o sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

compatível e determinado. Em seguida, resolva-o.

3. Para que valores de m o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - t = 1 \\ 2x - 2y - 2z - 3t = -1 \\ 2x - 2y - z - 5t = 9 \\ 3x - y + z - mt = 0 \end{cases}$$

é determinado?

4. Resolva os sistemas homogêneos abaixo por escalonamento e escreva as soluções na forma paramétrica:

$$(a) \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z + w - t = 0 \\ x - y - z + 2w - t = 0 \end{cases}$$

5. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 1 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 6x_5 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 - 5x_5 = -3 \end{cases}$$

e escreva a solução na forma paramétrica.

6. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e se $AB = BA$, prove que:

$$(a) (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2;$$

$$(b) (A - B)(A + B) = A^2 - B^2;$$

$$(c) (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3.$$

7. O produto de duas matrizes anti-simétricas de mesma ordem é uma matriz anti-simétrica? Justifique.

8. Efetue o produto AB , onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Determine todas as matrizes quadradas de ordem 3 que comutam com a matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

onde a é um número real.

10. Mostre que a matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível para quaisquer a , b e c números reais e que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Resolva os seguintes sistemas usando a regra de Cramer:

$$(a) \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$$

12. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

prove que $(A + A^{-1})^{2n+1} = 2^{2n+1}A$.