4302212 – Física IV

Décima segunda lista de exercícios

1. Os dois princípios sobre os quais Einstein fundamentou a Teoria da Relatividade Restrita nos dizem basicamente que:

I. as leis físicas são as **MESMAS** em todos os referenciais **INERCIAIS**; e

II. a velocidade da luz no **VÁCUO** é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais inerciais, e é **INDEPENDENTE** do movimento da fonte.

Explique, com as suas palavras, qual a razão desses dois princípios terem sido escolhidos. Para isso, invoque (i) resultados experimentais, (ii) a invariância sob transformações de Lorentz e (iii) o princípio da correspondência.

2. Considere dois referenciais inerciais: um S cujo espaço-tempo pode ser parametrizado por (t, x, y, z); e um S', que se afasta do primeiro com uma velocidade de módulo v, cujo espaço-tempo é parametrizável por (t', x', y', z').

(a) Mostre que as transformações de Lorentz

$$t' = \frac{t - (v/c^2)\, z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;, \quad x' = x \;, \quad y' = y \quad \text{e} \quad z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1}$$

são tais que

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 \left(t'\right)^2 - \left(x'\right)^2 - \left(y'\right)^2 - \left(z'\right)^2 \;. \tag{2}$$

(b) Mostre não apenas que

$$t = \frac{t' + (v/c^2)\, z'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;, \quad x = x' \;, \quad y = y' \quad \text{e} \quad z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

são as transformações inversas de (1), mas que elas também satisfazem a condição (2).

(c) Mostre que, quando tomamos

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z) \ \text{ e } \ (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) = (ct', x', y', z') \ , \tag{3}$$

as transformações de Lorentz (1) podem ser reescritas como

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L_{\mu\nu} x_\nu \ ,$$

onde $L_{\mu\nu}$ é o elemento da μ-ésima linha e ν-ésima coluna da matriz

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} .$$

Aqui, $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

(d) Já que a escolha (3) nos permite interpretar os parâmetros x_μ e x'_μ, com $\mu = 0, 1, 2, 3$, como aqueles que descrevem um espaço vetorial 4-dimensional, como o item **(c)** pode ser usado para justificar a condição (2)?

3. Uma vez que as transformações de Lorentz descrevem como o espaço e o tempo de diferentes referenciais inerciais estão relacionados entre si, passa a ser importante entender como isso pode ser usado para analisar, por exemplo, a física de uma partícula que é dotada de uma velocidade, haja vista que essa velocidade pode assumir diferentes valores em cada referencial.

(a) Considerando a situação de uma partícula que, quando parametrizada no referencial inercial S, se move com uma velocidade

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \ ,$$

mostre que a componente

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} \ ,$$

da velocidade $\vec{u}' = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$ que é associada a essa mesma partícula quando parametrizada no referencial inercial S' onde valem as mesmas transformações de Lorentz (1) do Exercício 2, é dada por

$$u'_z = \frac{u_z - v}{1 - u_z v/c^2} \ . \tag{4}$$

(b) Usando as mesmas considerações que permitiram resolver o item **(a)**, mostre que

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\ \frac{u_x}{1 - u_z v/c^2} \quad \text{e} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\ \frac{u_y}{1 - u_z v/c^2} \ .$$

(c) Já que tudo o que analisamos neste Exercício se relaciona para com dois referenciais (cujos eixos x e x', y e y', e z e z' são todos **PARALELOS**) que se afastam um do outro ao longo do eixo z (ou z'), use a igualdade (4) para mostrar que, quando $|\vec{u}| \leqslant c$ e $|\vec{v}| \leqslant c$, temos $|\vec{u}'| \leqslant c$.

4. O resultado que você obteve no Exercício 3 deixa claro que, como todas as componentes não nulas da velocidade de uma partícula assumem valores distintos em cada referencial inercial, a massa dessa partícula também assume diferentes valores em cada referencial. Afinal, quando consideramos, por exemplo, a situação de uma partícula livre que se move em conformidade ao que foi analisado no Exercício 3, as componentes p_x e p_y do seu momento (nas direções que são transversas ao movimento relativo dos dois referenciais) são **INVARIANTES** sob transformações de

Lorentz; ou seja,

$$p_x = mu_x = m'u'_x = p'_x \quad \text{e} \quad p_y = mu_y = m'u'_y = p'_y \ . \tag{5}$$

(a) Tomando qualquer uma das igualdades que constam em (5), assim como o que diz o item **(b)** do Exercício 3, mostre que

$$\frac{m}{m'} = \frac{1}{\gamma\,(1 - u_z v/c^2)} \ .$$

(b) Prove que

$$1 - \frac{(u')^2}{c^2} = \frac{(1 - u^2/c^2)\,(1 - v^2/c^2)}{(1 - u_z v/c^2)^2} \ .$$

(c) Use o resultado que você acabou de obter no item **(b)** para demonstrar não apenas que

$$m\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = m'\sqrt{1 - \frac{(u')^2}{c^2}} \ ,$$

mas que a massa de repouso de uma partícula é dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \ .$$

(d) Mostre que

$$m' = \frac{m - (v/c^2)\,p_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \quad p'_x = p_x \quad , \quad p'_y = p_y \ \text{ e } \ p'_z = \frac{p_z - mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(e) Notando toda a similaridade que existe entre (1) e as igualdades contidas no item **(d)**, mostre que (mc, p_x, p_y, p_z) também pode ser interpretado como um

4-vetor sob transformações de Lorentz. Ou seja, mostre que

$$p'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L_{\mu\nu} p_\nu \ ,$$

onde

$$(p_0, p_1, p_2, p_3) = (mc, p_x, p_y, p_z) \ \text{ e } \ (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3) = \left(m'c, p'_x, p'_y, p'_z\right) \ .$$

5. A Teoria da Relatividade Restrita diz que a energia de uma partícula, que possui massa m e se move com uma velocidade u num dado referencial S, é dada por $E = mc^2$.

(a) Levando em conta que

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \ ,$$

mostre que $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$.

(b) Considerando $(p_0, p_1, p_2, p_3) = (mc, p_x, p_y, p_z)$, demonstre que m_0 é invariante sob transformações de Lorentz. Use esse fato para demonstrar que, se o momento for conservado sob transformações de Lorentz, a energia também será conservada.

(b) Substituindo, na expressão da energia $E = mc^2$, a expressão da massa que foi dada no item **(a)**, encontre qual é o valor dessa energia relativística quando $u \ll c$ e analise esta situação à luz do que diz a Mecânica não relativística.

6. Sabendo que um próton, que possui uma massa de repouso de aproximadamente $938 \ \mathrm{MeV/c^2}$, possui uma energia cinética de $500 \ \mathrm{MeV}$, calcule qual é a velocidade que esse próton possui. Expresse essa velocidade como um múltiplo da velocidade da luz.

7. As equações de Maxwell que descrevem o comportamento dos campos eletromagnéticos no vácuo, quando escritas na sua forma diferencial, são dadas por

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad , \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\ ,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\ ,$$

onde ρ e $\vec{j}$ descrevem as densidades de carga e de corrente respectivamente.

(a) Calculando o divergente da equação de Maxwell que corresponde à Lei de **AMPÈRE-MAXWELL**, obtenha a equação de continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

relacionada à conservação de carga.

(b) Considerando que ρ_0 denota a densidade de cargas em repouso, prove que $(j_0, j_1, j_2, j_3) = (\rho c, j_x, j_y, j_z)$, onde

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{e} \quad \vec{j} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\vec{v}$$

é tal que

$$\partial_\mu\, j_\mu = \partial'_\mu\, j'_\mu\ , \ \ \text{onde}\ \ j'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L_{\mu\nu} j_\nu\ .$$

Ou seja, prove que (j_0, j_1, j_2, j_3) se transforma como um 4-vetor sob transformações de Lorentz. Aqui, $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$, onde $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$.

(c) Como os resultados dos itens **(a)** e **(b)**, juntos, implicam que a carga de um sistema físico é invariante sob transformações de Lorentz?

8. Seja o condutor cilindríco de raio R que consta na Figura 1, onde, no seu interior, consta a **MESMA** quantidade de cargas positivas (em azul) e negativas (em vermelho) com a **MESMA** magnitude q.

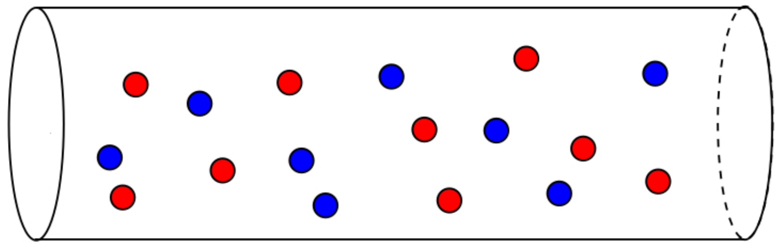

Figura 1

(a) Supondo que, num referencial inercial S, **TODAS** as cargas positivas e negativas se movem com as respectivas velocidades u_z e $-u_z$ ao longo do eixo z que é concêntrico ao cilindro, calcule a corrente total I que atravessa qualquer secção deste condutor.

(b) De acordo com o resultado que você obteve no **(a)**, quais são os valores das componentes E_x, E_y e E_z do campo elétrico que é responsável por essa corrente I? Quais são os valores das densidades de corrente j_x, j_y e j_z que estão relacionadas a esta situação?

(c) Analisando a mesma situação pela perspectiva de um referencial inercial S' que se afasta do primeiro ao longo do seu eixo z' que está sobreposto a z, calcule as novas velocidades u'_q e u'_{-q} que são aferíveis respectivamente para as cargas positivas e negativas em S'.

(d) Quais são os valores das densidades de carga ρ' e de corrente j'_x, j'_y e j'_z? E os valores das componentes E'_x, E'_y e E'_z do campo elétrico visto em S'?

(e) De acordo com o resultado que você obteve no **(d)**, qual é o valor da força F'_r que atua sobre uma partícula com carga Q que foi posta a uma distância r do condutor? Qual é o valor de $F_r = F'_r/\gamma$, que corresponde à mesma força que você acabou de calcular, só que vista pela perspectiva do referencial S?

(f) É possível afirmar que o resultado obtido para F_r corresponde à mesma força magnética que compõe a força de Lorentz? Ou seja, uma força elétrica num referencial inercial pode ser interpretada como magnética em outro? Por quê?