Como a Lei de Snell pode ser obtida do Princípio de Fermat?

Maria Fernanda Araujo de Resende resende@if.usp.br

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, CP 66318, 05315-970 São Paulo SP, Brasil

1 Comentários iniciais

A primeira coisa que devemos ter em mente para responder esta pergunta é a definição do *índice de refração absoluto* de um meio homogêneo, que é dada por

$$n = \frac{c}{v} \quad , \tag{1}$$

sendo

- c a velocidade relacionada à luz no *vácuo*, e
- v a velocidade (experimentalmente observada) da luz se propagando no meio supramencionado.

Aliás, como c é a maior velocidade já observada na Natureza, de acordo esta definição é bem fácil perceber que

- sempre teremos $n \geqslant 1$ e, portanto,
- o menor índice de refração absoluto será o do vácuo pois, para $v = c$,

$$n = \frac{c}{c} = 1 \quad .$$

Em posse desta informação, ao notar que o *Princípio de Fermat* preconiza que, *de todos os caminhos possíveis para ir de um ponto a outro, a luz segue aquele que é percorrido no tempo* <u>*mínimo*</u> [1], se torna interessante fazer uma estimativa para este tempo, para ver aonde isso nos leva.

2 Caminho óptico

Para isso, tomemos dois pontos O e F de uma única vizinhança U, que está relacionada a um meio fisicamente homogêneo. Diante do fato (experimentalmente observado) de que, ao associarmos O e F aos respectivos pontos de saída e de chegada de um feixe luminoso, o seu trajeto se identifica com o segmento de reta $\overline{OF}$, ao assumirmos que velocidade v deste feixe é *constante*, podemos expressá-la como

$$v = \frac{d}{t} \quad , \tag{2}$$

onde d é a distância entre O e F, enquanto t é o tempo gasto para o feixe se locomover entre esses dois pontos. Deste modo, pela combinação de (1) com (2), é fácil perceber que

$$t = \frac{d}{v} = \frac{nd}{c} \quad . \tag{3}$$

Com base neste último resultado é possível notar uma coisa curiosa. Afinal, da mesma maneira que podemos interpretar t como o tempo que este feixe luminoso leva para percorrer uma distância d, com a velocidade v constante que é característica do meio por onde ele se propaga, também podemos interpretar t de um outro jeito: como sendo o tempo que a luz levaria para percorrer, com sua tradicional velocidade c do vácuo, uma nova distância nd. Ou seja, se encararmos a situação por uma outra perspectiva, que nos permite considerar que, mesmo passando por um meio homogêneo diferente do vácuo, a luz nunca altera a sua velocidade, tudo funcionaria como se a tradicional distância d (associada aos pontos O e F) fosse ampliada pelo fator n: esta nova distância, expressa por

$$d' = nd$$

é o que chamamos de *caminho óptico*.

Obviamente existem situações mais gerais relacionadas a propagação de um feixe luminoso, e uma delas surge, por exemplo, ao supormos que O e F pertencem a dois meios que, apesar de serem considerados homogêneos, não têm necessariamente a mesma homogeneidade. Neste caso, se considerarmos que estes são os únicos meios pelos quais um feixe de luminoso deve transitar, é imediato que o trajeto efetuado por este feixe (que se origina em O e chega até F) pode ser interpretado pela composição de dois segmentos de reta $\overline{OP}$ e $\overline{PF}$, sendo P um ponto da interface destes dois meios, conforme ilustra a Figura 1.

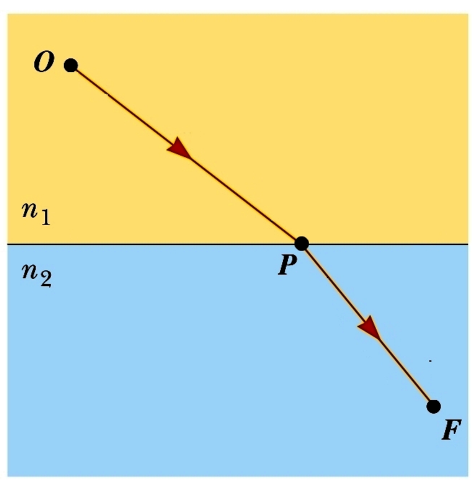

Figura 1: Comportamento de um feixe luminoso que se propaga inicialmente através de um meio homogêneo e que, depois de incidir sobre a interface que separa este primeiro meio de um outro (também homogêneo, mas (a priori) distinto) é refratado.

Aliás, como cada um dos segmentos suprarreferidos estão relacionados a propagação, em linha reta, deste feixe luminoso por um único meio homogêneo, utilizando o mesmo raciocínio que nos levou a (3), ao notar que

$$t_1 \;=\; \frac{n_1 d_1}{c}$$

é o tempo relacionado ao percurso do feixe por um meio com índice de refração n_1, onde está inserido o segmento $\overline{OP}$ cujo tamanho é d_1, enquanto

$$t_2 \;=\; \frac{n_2 d_2}{c}$$

é o tempo gasto pelo mesmo feixe que, ao emergir do meio anterior, transita pelo meio de índice de refração n_1 no qual consta o segmento $\overline{OP}$ de tamanho d_2, por exemplo, se torna possível fazer uma estimativa para o tempo total gasto no percurso todo (que vai de O até F passando por P) pela superposição

$$t_{\texttt{total}} \;=\; t_1 \;+\; t_2 \quad . \tag{4}$$

3 Respondendo a pergunta

Porém, diante de todas estas estimativas e observações, é natural fazer a seguinte pergunta:

E este ponto P da interface: ele pode ser um ponto qualquer?

Para respondê-la, vamos considerar o caso mais geral possível, apenas supondo que feixe luminoso que se propaga no primeiro meio incide sobre a interface fazendo um ângulo θ_1 (a priori) arbitrário com a sua normal enquanto, no segundo meio, o feixe sai desta mesma interface com um ângulo θ_2 também (a priori) arbitrário relação à mesma normal, de acordo com o que mostra a Figura 2.

Aliás, uma coisa bem simples que segue desta figura é que, como d_1 é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de tamanhos a e x, assim como d_2 também é a hipotenusa de outro triângulo retângulo cujos catetos possuem tamanhos b e $y - x$,

$$d_1^2 \;=\; a^2 \;+\; x^2 \;\;\Rightarrow\;\; d_1 \;=\; \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \text{e} \qquad d_2^2 \;=\; b^2 \;+\; (y-x)^2 \;\;\Rightarrow\;\; d_2 \;=\; \sqrt{b^2 + (y-x)^2} \quad . \tag{5}$$

Desta forma, como as considerações anteriores nos indicam que o tempo total que um feixe luminoso leva, para ir de O até F passando por P, é dado pela superposição (4), por efeito destes dois últimos resultados, temos

$$t_{\texttt{total}} \;=\; \frac{n_1 d_1}{c} \;+\; \frac{n_2 d_2}{c} \;=\; \frac{n_1}{c}\,\sqrt{a^2 + x^2} \;+\; \frac{n_2}{c}\,\sqrt{b^2 + (y-x)^2} \quad . \tag{6}$$

sendo a, b e y constantes reais enquanto, diante do desejo de avaliarmos se P pode ser arbitrário ou não, x deve ser tomado como uma variável real: ou seja, $t_{\texttt{total}}$ deve ser visto como uma função da sua única variável que, no caso, é x.

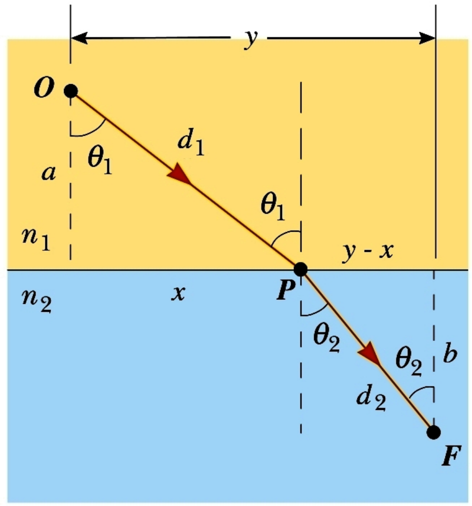

Figura 2: Desenho esquemático do mesmo comportamento já ilustrado na Figura 1, porém com a presença de algumas constantes e variáveis úteis à obtenção da Lei de Snell que será feita a seguir.

Uma das coisas que naturalmente seguem de (6) é que

$$\frac{d}{dx}\,t_{\texttt{total}} = \frac{n_1}{c}\,\frac{d}{dx}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{n_2}{c}\,\frac{d}{dx}\sqrt{b^2+(y-x)^2} = \frac{n_1}{c}\,\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{n_2}{c}\,\frac{y-x}{\sqrt{b^2+(y-x)^2}}$$

a qual, pelo uso de (5), se reduz a

$$\frac{d}{dx}\,t_{\texttt{total}} = \frac{n_1}{c}\,\frac{x}{d_1} - \frac{n_2}{c}\,\frac{y-x}{d_2} \tag{7}$$

Assim, tendo em vista que o princípio de Fermat nos diz que (6) deve ser mínimo, para que isso realmente ocorra deve, pelo menos, existir um valor de x que anule este último resultado. Aliás, olhando para este mesmo resultado (7), é muito fácil perceber que esse x existe, pois

$$\frac{d}{dx}\,t_{\texttt{total}} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n_1}{c}\,\frac{x}{d_1} - \frac{n_2}{c}\,\frac{y-x}{d_2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{n_2 d_1}{(n_1 d_2 + n_2 d_1)}\,y \quad . \tag{8}$$

Nestes termos, como

$$\frac{d^2}{dx^2}\,t_{\texttt{total}} = \frac{n_1}{cd_1} + \frac{n_2}{cd_2} > 0 \quad ,$$

vemos que o valor de x obtido em (8) realmente o *único* que minimiza $t_{\texttt{total}}$ [2]: ou seja, se o princípio de Fermat é válido, P não pode ser um ponto arbitrário sobre a interface destes dois meios e, portanto, os ângulos θ_1 e θ_2 estão relacionados entre si.

Aliás, para entender como funciona o relacionamento entre θ_1 e θ_2, basta tomarmos a igualdade (8) e olharmos para ela de outra maneira: afinal, como todas as constantes e variáveis que constam na Figura 2 nos permitem notar que

$$\sin\theta_1 \ = \ \frac{x}{d_1} \quad \text{e} \quad \sin\theta_2 \ = \ \frac{y-x}{d_2} \quad ,$$

é muito fácil perceber que o mesmo valor obtido em (8) também é aquele que satisfaz a

$$n_1 \ \sin\theta_1 \ - \ n_2 \ \sin\theta_2 \ = \ 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ n_1 \ \sin\theta_1 \ = \ n_2 \ \sin\theta_2 \quad ,$$

resultado o qual se identifica com o já observado (experimentalmente) por Snell.

Referências

[1] H. M. Nussenzveig: *Curso de Física Básica, Volume 4: Ótica, Relatividade, Física Quântica* (Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo 1998).

[2] T. M. Apostol: *Calculus, Volume I: One-Variable Calculus, with a Introduction to Linear Algebra* (John Willey & Sons Inc., New York 1996).