Resolução da P2 - 03/11
Mecânica Quântica 1 - Diurno

Exercício 1: Neste exercício vamos considerar um sistema de dois níveis de energia e a base cujos vetores são estados estacionários da hamiltoniana com

$$\hat{H}\,|E_1\rangle = E_1\,|E_1\rangle$$

e

$$\hat{H}\,|E_2\rangle = E_2\,|E_2\rangle\,.$$

Seja $\hat{A}$ um observável cujos autovalores são iguais a a_1 e a_2 e os correspondentes autovetores são,

$$|a_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|E_1\rangle + \frac{1}{2}\,|E_2\rangle$$

e

$$|a_2\rangle = -\frac{1}{2}\,|E_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|E_2\rangle\,.$$

a) Para um sistema de dois níveis um estado no instante t pode ser escrito na forma

$$|t\rangle = c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|E_1\rangle + c_2 e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,|E_2\rangle$$

onde c_1 e c_2 são os coeficientes da expansão do estado inicial na base dos estados estacionários

$$|t=0\rangle = c_1\,|E_1\rangle + c_2\,|E_2\rangle\,.$$

Levando em conta que no instante $t = 0$ o sistema se encontra no estado $|a_2\rangle$ então facilmente obtemos

$$c_1 = \langle E_1|a_2\rangle = -\frac{1}{2}$$

e

$$c_2 = \langle E_2|a_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

de modo que

$$|t\rangle = -\frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|E_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,|E_2\rangle\,. \qquad (1)$$

b) O vetor de estado no instante $t = t_1$ é simplesmente

$$|t=t_1\rangle = -\frac{1}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t_1}\,|E_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t_1}\,|E_2\rangle$$

de modo que a probabilidade de obtermos o valor a_1 numa medida de $\hat{A}$ neste instante é

$$p\left(a_1; t=t_1\right) = \left|\langle a_1 | t=t_1\rangle\right|^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t_1} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t_1} \end{pmatrix} \right|^2$$

de onde extraímos

$$p\left(a_1; t=t_1\right) = \frac{3}{8}\left(1 - \cos\omega_{12} t_1\right)$$

com $\omega_{12} \equiv \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$.

c) Pelo princípio do colapso do vetor de estado se no instante $t = t_1$ da medida de $\hat{A}$ obtivermos o valor a_1 o estado do sistema colapsa para o autoestado $|a_1\rangle$. Logo, para instantes posteriores a t_1, o sistema passa a evoluir no tempo tomando agora como estado inicial (lógico em $t = t_1$) o autoestado $|a_1\rangle$, ou seja,

$$|t > t_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1(t-t_1)} |E_1\rangle + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_2(t-t_1)} |E_2\rangle \,. \tag{2}$$

É como se no instante da medida o sistema perdesse a "memória" anterior a t_1 e começasse a evoluir no tempo tomando como estado inicial o autoestado $|a_1\rangle$.

Exercício 2: Vamos considerar um sistema cujo espaço de vetores de estado é bidimensional e que os vetores $|e_1\rangle$ e $|e_2\rangle$ formam uma base ortonomal neste espaço. A representação do operador linear $\hat{A}$ nesta base é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) É fácil verificar que $\hat{A}$ de fato é um observável pois

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} = A,$$

ou seja, sua representação na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ é uma matriz hermiteana.

b) Na Mecânica Quântica os possíveis resultados obtidos na medição de um observável são os autovalores do operador hermiteano associado. Se denotarmos por $|\lambda\rangle$ o autovetor de $\hat{A}$ associado ao autovalor λ temos

$$\hat{A}|\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle \,.$$

Se na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ o autovetor $|\lambda\rangle$ pode ser escrito da forma

$$|\lambda\rangle = a|e_1\rangle + b|e_2\rangle$$

a equação de autovalores assume a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Note que temos um sistema linear homogêneo. Para admitir soluções não-triviais devemos ter

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

A equação acima é a chamada **equação característica**. Facilmente concluímos que

$$\lambda = \pm\sqrt{2}. \tag{3}$$

Dessa maneira, em medidas de $\hat{A}$, obtemos ou $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

c) Vamos supor que o sistema esteja no estado genérico

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|e_1\rangle + \sin\theta\,|e_2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Queremos determinar a probabilidade de, numa medida de $\hat{A}$, obtermos cada um dos seus possíveis valores. Para efetuar esses cálculos devemos obter os autovetores de $\hat{A}$.

- $\lambda = \sqrt{2}$: $\quad \hat{A}\left|\sqrt{2}\right\rangle = \sqrt{2}\left|\sqrt{2}\right\rangle$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1-i \\ 1+i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \rightarrow b = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}a.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} b = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}a \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}$$

de onde obtemos $|a|^2 = \frac{1}{2}$. Note que a é determinado a menos de uma fase. Podemos escolhê-lo como sendo real e positivo. Logo

$$\left|\sqrt{2}\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\sqrt{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|e_1\rangle + \frac{(1+i)}{2}\,|e_2\rangle\,.$$

Assim a probabilidade de numa medida de $\hat{A}$ obtermos o valor $\sqrt{2}$ é dada por

$$p\left(\sqrt{2};\theta\right) = \left|\left\langle\sqrt{2}|\theta\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right|^2$$

de onde obtemos

$$p\left(\sqrt{2};\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta\right). \tag{4}$$

- $\lambda = -\sqrt{2}$: $\quad \hat{A}\left|-\sqrt{2}\right\rangle = -\sqrt{2}\left|-\sqrt{2}\right\rangle$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-i \\ 1+i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \rightarrow b = -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} a.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} b = -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} a \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}$$

de onde obtemos $|a|^2 = \frac{1}{2}$. Logo

$$\left|-\sqrt{2}\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \left|-\sqrt{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left|e_1\right\rangle - \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \left|e_2\right\rangle.$$

Assim a probabilidade de numa medida de $\hat{A}$ obtermos o valor $-\sqrt{2}$ é dada por

$$p\left(-\sqrt{2};\theta\right) = \left|\left\langle -\sqrt{2}|\theta\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right|^2$$

de onde obtemos

$$p\left(-\sqrt{2};\theta\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\cos\theta\sin\theta\right). \tag{5}$$

Obviamente poderíamos ter calculado, por exemplo, $p\left(-\sqrt{2};\theta\right)$ diretamente pela expressão

$$p\left(-\sqrt{2};\theta\right) = 1 - p\left(\sqrt{2};\theta\right)$$

utilizando (4). A expressão acima reflete o fato de que a soma das probabilidades deve ser 1. Entretanto optei por fazer todo esse cálculo apenas para checar os resultados de modo a não cometer nenhum erro.