FMA0403 - MECÂNICA QUÂNTICA I
Segundo Semestre de 2008 - Diurno
Resolução Comentada da Terceira Lista de Problemas

Eduardo T. D. Matsushita

Exercício 1: A representação de um operador linear $\hat{A}$ na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Facilmente podemos concluir que $\hat{A}$ é um observável pois

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A,$$

ou seja, sua representação na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ é uma matriz hermiteana.

b) Denotando por $|\lambda\rangle$ o autovetor de $\hat{A}$ associado ao autovalor λ temos

$$\hat{A}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,.$$

Se na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ o autovetor $|\lambda\rangle$ pode ser escrito da forma

$$|\lambda\rangle = a\,|e_1\rangle + b\,|e_2\rangle$$

a equação de autovalores é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Note que temos um sistema linear homogêneo. Para admitir soluções não-triviais devemos ter

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

A equação acima é a chamada **equação característica**. Facilmente concluímos que

$$\lambda = \pm 1. \tag{1}$$

Observe que os autovalores são reais como era de se esperar pois $\hat{A}$ é um operador hermiteano.

c) Vamos determinar os autovetores normalizados de $\hat{A}$.

- $\lambda = +1$: $\quad \hat{A}\,|+1\rangle = |+1\rangle$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \to b = ia.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} b = ia \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}$$

de onde obtemos $|a|^2 = \frac{1}{2}$. Note que a é determinado a menos de uma fase. Podemos escolhê-lo como sendo real e positivo. Logo

$$|+1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow |+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |e_2\rangle . \tag{2}$$

- $\lambda = -1$: $\quad \hat{A} |-1\rangle = - |-1\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \to b = -ia.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} b = -ia \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}$$

de onde obtemos $|a|^2 = \frac{1}{2}$. Logo

$$|-1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |e_2\rangle . \tag{3}$$

É fácil verificar que os autovetores $|+1\rangle$ e $|-1\rangle$ são ortogonais, ou seja,

$$\langle +1 | -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

d) Queremos determinar a matriz da transformação unitária $\hat{U}$ que diagonaliza a representação de $\hat{A}$ na base $\{|e_1\rangle , |e_2\rangle\}$. De fato os autovetores calculados em c) são as colunas dessa matriz, ou seja,

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Observe que

$$U^\dagger A U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = diag\,[1, -1] .$$

e) Na Mecânica Quântica os possíveis resultados obtidos na medição de um observável são os autovalores do operador hermiteano associado. Dessa forma, numa medida de $\hat{A}$ podemos encontrar ou $+1$ ou -1.

f) Vamos supor que a partícula esteja num estado genérico

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|e_1\rangle + \sin\theta\,|e_2\rangle\,.$$

Queremos saber qual a probabilidade P de em medidas de $\hat{A}$ encontrarmos o valor $+1$. Essa probabilidade é o módulo quadrado da projeção de $|\theta\rangle$ em $|+1\rangle$, ou seja,

$$P = |\langle +1|\theta\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Portanto a probabilidade procurada é

$$P = 50\%. \tag{6}$$

g) O valor médio de $\hat{A}$ relativo ao estado $|\theta\rangle$:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \langle\theta|\,\hat{A}\,|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

portanto

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = 0. \tag{7}$$

h) Se o sistema que se encontra no estado descrito pelo vetor de onda $|\theta\rangle$ é submetido a uma medição do observável $\hat{A}$, o efeito do processo de medida é a alteração do estado do sistema. De fato, quando medimos o valor $+1$ o estado $|\theta\rangle$ se reduz à sua projeção normalizada sobre o autovetor $|+1\rangle$.

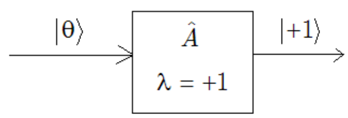

Figura 1: Após o instante em que medimos $+1$ o estado do sistema "pula" para o autoestado $|+1\rangle$.

Se após a primeira medida medirmos novamente o observável $\hat{A}$ obteremos o valor $+1$ com uma probabilidade de 100%. Esse problema ilustra o princípio da **redução do pacote de onda**.

Exercício 2: Este exercício ilustra a ação da matriz mudança de base. Seja $\{|e_1\rangle\,, |e_2\rangle\}$ uma base ortonormal de um espaço de vetores de estado bidimensional. Seja

$$
\begin{aligned}
|e_1'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle \\
|e_2'\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle .
\end{aligned}
$$

a) Por inspeção direta é fácil verificar que o conjunto $\{|e_1'\rangle, |e_2'\rangle\}$ forma uma base. De fato:

$$
\langle e_1'|e_1'\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1,
$$

$$
\langle e_2'|e_2'\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1
$$

e

$$
\langle e_1'|e_2'\rangle = \langle e_2'|e_1'\rangle = 0.
$$

Compactamente verificamos que

$$
\left\langle e_i'|e_j'\right\rangle = \delta_{ij} \tag{8}
$$

o que caracteriza uma base ortonormal.

b) A transformação unitária S que relaciona as duas bases é definida pela relação

$$
|e_i'\rangle = \sum_j |e_j\rangle S_{ji}.
$$

Dessa forma facilmente obtemos

$$
S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}
$$

c) A representação do operador $\hat{B}$ na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ é

$$
B_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Para determinar a representação na nova base devemos calcular

$$
B_{e'} = S^\dagger B_e S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Logo

$$
B_{e'} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}
$$

Exercício 3: Vamos demonstrar algumas identidades importantes.

a) Queremos provar que o hermiteano conjugado do produto de dois operadores é o produto dos respectivos hermiteanos conjugados na ordem oposta. Para dados dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e dois vetores de estado $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ temos

$$\langle\alpha|\,\hat{A}\hat{B}\,|\beta\rangle = \langle\beta|\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger}|\alpha\rangle^{\star}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\,\hat{A}\hat{B}\,|\beta\rangle &= \sum_{i,j,k}\alpha_i^{\star}A_{ij}B_{jk}\beta_k = \left(\sum_{i,j,k}\alpha_i A_{ij}^{\star}B_{jk}^{\star}\beta_k^{\star}\right)^{\star} \\
&= \left(\sum_{i,j,k}\beta_k^{\star}B_{kj}^{\dagger}A_{ji}^{\dagger}\alpha_i\right)^{\star} = \langle\beta|\,\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}\,|\alpha\rangle^{\star}.
\end{aligned}$$

Comparando as duas equações concluímos que

$$\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}. \tag{11}$$

b) Seja $\hat{A}$ um operador hermiteano, ou seja, numa dada base temos $A_{ij}^{\dagger} = A_{ij}$. Para dados dois vetores de estado $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left\langle\hat{A}\alpha|\hat{A}\beta\right\rangle &= \sum_{i,j,k}A_{ij}^{\star}\alpha_j^{\star}A_{ik}\beta_k = \sum_{i,j,k}\alpha_j^{\star}A_{ji}^{\dagger}A_{ik}\beta_k \\
&= \sum_{i,j,k}\alpha_j^{\star}A_{ji}A_{ik}\beta_k = \sum_{j,k}\alpha_j^{\star}A_{jk}^{2}\beta_k \\
&= \langle\alpha|\,\hat{A}^2\,|\beta\rangle.
\end{aligned}$$

Logo verificamos que

$$\left\langle\hat{A}\alpha|\hat{A}\beta\right\rangle = \langle\alpha|\,\hat{A}^2\,|\beta\rangle. \tag{12}$$

c) Seja $\hat{U}$ um operador unitário.

(i) Para dados dois vetores de estado $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left\langle\hat{U}\alpha|\hat{U}\beta\right\rangle &= \sum_{i,j,k}U_{ij}^{\star}\alpha_j^{\star}U_{ik}\beta_k = \sum_{i,j,k}\alpha_j^{\star}U_{ji}^{\dagger}U_{ik}\beta_k \\
&= \sum_{i,j,k}\alpha_j^{\star}\delta_{jk}\beta_k = \sum_{j}\alpha_j^{\star}\beta_j \\
&= \langle\alpha|\beta\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\langle \hat{U}\alpha | \hat{U}\beta \right\rangle = \langle \alpha|\beta\rangle . \tag{13}$$

O resultado acima nos permite concluir que transformações unitárias preservam produtos escalares.

(ii) Suponha que $|u\rangle$ seja um autovetor de $\hat{U}$ com autovalor u, ou seja,

$$\hat{U}\,|u\rangle = u\,|u\rangle .$$

De (13) sabemos que

$$\left\langle \hat{U}u | \hat{U}u \right\rangle = \langle u|u\rangle .$$

Por outro lado

$$\left\langle \hat{U}u | \hat{U}u \right\rangle = |u|^2 \langle u|u\rangle .$$

Comparando as duas equações obtemos

$$\left(|u|^2 - 1\right)\langle u|u\rangle = 0$$

de onde concluímos, levando em conta que estamos interessados em autovetores não-triviais, que

$$|u|^2 = 1. \tag{14}$$

Observe que os autovalores de um operador unitário são fases.

(iii) Vamos denotar por $|\theta_1\rangle$e $|\theta_2\rangle$ dois autovetores de $\hat{U}$ associados aos autovalores $e^{i\theta_1}$ e $e^{i\theta_2}$ distintos (aqui estamos utilizando o fato, provado em (ii), que os autovalores são fases). Sabemos que

$$\langle\theta_1|\,\hat{U}\,|\theta_2\rangle = \langle\theta_2|\,\hat{U}^\dagger\,|\theta_1\rangle^\star .$$

Por outro lado

$$\langle\theta_1|\,\hat{U}\,|\theta_2\rangle = e^{i\theta_2}\,\langle\theta_1|\theta_2\rangle$$

e

$$\langle\theta_2|\,\hat{U}^\dagger\,|\theta_1\rangle^\star = e^{i\theta_1}\,\langle\theta_2|\theta_1\rangle^\star = e^{i\theta_1}\,\langle\theta_1|\theta_2\rangle .$$

Assim obtemos

$$\left(e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}\right)\langle\theta_1|\theta_2\rangle = 0$$

o que implica

$$\langle\theta_1|\theta_2\rangle = 0, \tag{15}$$

ou seja, $|\theta_1\rangle$ e $|\theta_2\rangle$ são ortogonais.