FMA0403 - MECÂNICA QUÂNTICA I
Segundo Semestre de 2008 - Diurno
Resolução Comentada da Quarta Lista de Problemas

Eduardo T. D. Matsushita

Exercício 1: Neste exercício vamos considerar um sistema de dois níveis de energia e a base cujos vetores são estados estacionários da hamiltoniana com

$$\hat{H}\,|1\rangle = \epsilon_1\,|1\rangle$$

e

$$\hat{H}\,|2\rangle = \epsilon_2\,|2\rangle\,.$$

Seja $\hat{A}$ um observável cujos autovalores são iguais a a_1 e a_2 e os correspondentes autovetores são,

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|2\rangle$$

e

$$|a_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|2\rangle\,.$$

a) Para um sistema de dois níveis um estado no instante t pode ser escrito na forma

$$|t\rangle = c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t}\,|1\rangle + c_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t}\,|2\rangle$$

onde c_1 e c_2 são as projeções do vetor de estado no instante $t = 0$, respectivamente, sobre os vetores $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Levando em conta que no instante $t = 0$ o sistema se encontra no estado $|a_1\rangle$ então facilmente obtemos

$$c_1 = \langle 1|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$c_2 = \langle 2|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que

$$|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t}\,|2\rangle\,. \tag{1}$$

b) Aqui vamos calcular o valor médio das medidas de $\hat{H}$ e $\hat{A}$ no instante t. É importante salientar que esses cálculos independem da escolha da representação, ou seja, podemos efetuar as contas utilizando ou a base $\{|1\rangle\,, |2\rangle\}$ dos autoestados do hamiltoniano ou a base $\{|a_1\rangle\,, |a_2\rangle\}$ dos autoestados de $\hat{A}$.

- *Valor médio de $\hat{H}$:* Vamos fazer nossos cálculos na base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. Note que nessa representação a matriz associada ao operador $\hat{H}$ é diagonal e dessa maneira temos

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_t = \langle t|\,\hat{H}\,|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} & e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \end{pmatrix}$$

o que resulta em

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle_t = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \tag{2}$$

que é uma constante.

- *Valor médio de $\hat{A}$:* Aqui vamos fazer nossos cálculos na base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ onde a matriz associada ao operador $\hat{A}$ é diagonal. Primeiramente vamos obter a representação do vetor de estado $|t\rangle$ nesta base, ou seja, determinar os coeficientes b_1 e b_2 tais que

$$|t\rangle = b_1 |a_1\rangle + b_2 |a_2\rangle .$$

Entretanto já estamos "carecas" de saber que $b_1 = \langle a_1|t\rangle$ e $b_2 = \langle a_2|t\rangle$ e portanto facilmente obtemos

$$b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \end{pmatrix} = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t}}{2}$$

e

$$b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \end{pmatrix} = \frac{-e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t}}{2}.$$

Logo

$$|t\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t}}{2} |a_1\rangle + \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t}}{2} |a_2\rangle .$$

Assim o cálculo do valor médio de $\hat{A}$ é dado por

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} & e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \end{pmatrix}$$

que resulta em

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_t = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos \omega_{12} t \tag{3}$$

onde definimos $\omega_{12} \equiv \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\hbar}$. Note que o valor médio $\left\langle \hat{A} \right\rangle_t$ depende explicitamente do tempo.

c) A probabilidade de numa medida de $\hat{A}$ no instante t encontrarmos o valor a_2 é simplesmente

$$p\left(a_2;t\right) = \left|\langle a_2|t\rangle\right|^2 = \left|\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t}}{2}\right|^2$$

o que resulta

$$p\left(a_2;t\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\omega_{12}t\right). \tag{4}$$

d) Vamos agora calcular as dispersões para as medidas de $\hat{H}$ e $\hat{A}$.

- *Dispersão para medidas de* $\hat{H}$: O primeiro passo é calcular

$$\left\langle \hat{H}^2 \right\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} & e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon_1^2 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \end{pmatrix}$$

o que resulta

$$\left\langle \hat{H}^2 \right\rangle_t = \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{2}.$$

Recorrendo ao resultado (2) obtemos a variância

$$\sigma_H^2 = \left\langle \hat{H}^2 \right\rangle_t - \left\langle \hat{H} \right\rangle_t^2 = \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}\right)^2 \tag{5}$$

- *Dispersão para medidas de* $\hat{A}$: Calculamos inicialmente

$$\left\langle \hat{A}^2 \right\rangle_t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} & e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 t} - e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 t} \end{pmatrix}$$

o que resulta

$$\left\langle \hat{A}^2 \right\rangle_t = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \frac{a_1^2 - a_2^2}{2}\cos\omega_{12}t$$

com $\omega_{12} \equiv \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\hbar}$. Recorrendo ao resultado (3) obtemos a variância

$$\sigma_A^2 = \left\langle \hat{A}^2 \right\rangle_t - \left\langle \hat{A} \right\rangle_t^2 = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \sin^2\omega_{12}t. \tag{6}$$

- *Verificação do princípio da incerteza energia-tempo*: O desvio (5) é a própria incerteza nas medidas da energia

Por outro lado, com auxílio de (3) e (6), calculamos a incerteza no tempo da forma

$$\tau_A^2 = \frac{\sigma_A^2}{\left|\frac{d\langle \hat{A}\rangle_t}{dt}\right|^2} = \frac{1}{\omega_{12}^2} = \left(\frac{\hbar}{\epsilon_1 - \epsilon_2}\right)^2 .$$

Multiplicando as incertezas calculadas obtemos

$$\sigma_H \tau_A = \frac{\hbar}{2} \tag{7}$$

compatível com o princípio da incerteza energia-tempo e o produto assume o valor mínimo.

e) Este exercício ilustra o princípio da redução do pacote de onda. No instante $t = 0$ o sistema se encontrava no estado caracaterizado pelo vetor $|a_1\rangle$. A evolução temporal do sistema para $t > 0$ foi determinada no item a) deste exercício. Suponha agora que num instante $t_0 > 0$ foi obtido o valor a_2 numa medida do observável $\hat{A}$. A pergunta que se faz é: como caracterizamos agora a evolução dinâmica do sistema para $t > t_0$. A resposta é simples: pelo princípio da redução do pacote de onda, no instante da medida o estado do sistema colapsa para o autoestado $|a_2\rangle$. Logo, para instantes posteriores a t_0, o sistema passa a evoluir no tempo tomando agora como estado inicial (lógico em $t = t_0$) o autoestado $|a_2\rangle$, ou seja,

$$|t > t_0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_1 (t - t_0)} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_2 (t - t_0)} |2\rangle . \tag{8}$$

É como se no instante da medida o sistema perdesse a "memória" anterior a t_0 e começasse a evoluir no tempo tomando como estado inicial o autoestado $|a_2\rangle$.

Exercício 2: A representação de dois observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ na base de vetores de estado $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Para mostrar que os observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são incompatíveis basta verificar que as matrizes A e B que representam esses observáveis na base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ não comutam, ou seja, que $[A, B] \equiv AB - BA \neq 0$. Calculando explicitamente o comutador facilmente obtemos que

$$[A, B] = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

e portanto $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são incompatíveis.

b) Vamos supor que o sistema esteja num estado genérico caracterizado pelo vetor de estado

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|e_1\rangle + \sin\theta\,|e_2\rangle \to \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular a dispersão das medidas de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e testar se está de acordo com o princípio da incerteza.

- *Valores médios de $\hat{A}$ e $\hat{B}$*: Temos

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \sin 2\theta$$

e

$$\left\langle \hat{B} \right\rangle_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0.$$

- *Valores médios de $\hat{A}^2$ e $\hat{B}^2$*: Temos

$$\left\langle \hat{A}^2 \right\rangle_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 1$$

e

$$\left\langle \hat{B}^2 \right\rangle_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 1.$$

- *Dispersões*:

$$\sigma_A^2 = \left\langle \hat{A}^2 \right\rangle_\theta - \left\langle \hat{A} \right\rangle_\theta^2 = \cos^2 2\theta \tag{10}$$

e

$$\sigma_B^2 = \left\langle \hat{B}^2 \right\rangle_\theta - \left\langle \hat{B} \right\rangle_\theta^2 = 1 \tag{11}$$

de modo que

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 = \cos^2 2\theta. \tag{12}$$

De acordo com o princípio da incerteza

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A, B] \rangle \right|^2 .$$

Calculando o valor médio do comutador (9) com relação ao estado genérico $|\theta\rangle$ obtemos

$$\langle [A,B] \rangle_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 2i\cos 2\theta$$

de modo que relação de incerteza para os observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ tem a forma

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \cos^2 2\theta. \tag{13}$$

Levando em conta o resultado (12) anteriormente obtido concluímos que o princípio da incerteza é satisfeito e além disso o produto assume o valor mínimo.

c) Para resolver este item precisamos dos autovalores e autovetores dos observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Levando em conta que na resolução comentada da Lista 3 encontramos as contas detalhadas para o cálculo de autovalores e autovetores de um operador, tomarei a liberdade de colocar apenas os resultados (caso houver dúvidas nas contas venha conversar comigo):

- *Autovalores e autovetores de $\hat{A}$*: Os autovalores são +1 e -1 e os respectivos autovetores são:

$$|{+1}; A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|{-1}; A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *Autovalores e autovetores de $\hat{B}$*: Os autovalores são +1 e -1 e os respectivos autovetores são:

$$|{+1}; B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |e_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|{-1}; B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} |e_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Supondo novamente que o sistema se encontre no estado $|\theta\rangle$. A probabilidade $p\,(A,+1)$ de numa medição do observável $\hat{A}$ encontramos +1 é dada por

$$p\,(A,+1) = \left|\langle +1; A|\theta\rangle\right|^2$$

de onde obtemos

$$p\,(A,+1) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2\theta\right). \tag{14}$$

Se numa medida de $\hat{B}$ obtemos o valor -1, pelo princípio da redução do pacote de onda, o estado do sistema colapsa para o autoestado $|{-1}; B\rangle$. Nessa condição a probabilidade $\bar{p}\,(A,+1)$ de numa medição do observável $\hat{A}$ encontramos $+1$ agora é dada por

$$\bar{p}\,(A,+1) = \left|\langle +1;A| -1;B\rangle\right|^2$$

de onde obtemos

$$\bar{p}\,(A,+1) = \frac{1}{2} = 50\%. \tag{15}$$

O fato dos observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ serem incompatíveis implica que os processos de medição dessas grandezas se interferem mutuamente.