FMA0403 - MECÂNICA QUÂNTICA I
Segundo Semestre de 2008 - Diurno
Resolução Comentada da Quinta Lista de Problemas

Eduardo T. D. Matsushita

Operadores de aniquilação e criação de quanta:
$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$
$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right)$
$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$

Exercício 1: Vamos considerar um sistema cujo hamiltoniano é de um oscilador harmônico

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

e um vetor de estado

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

onde α é um número complexo e $|n\rangle$ é o autovetor de $\hat{H}$ com n quanta

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle .$$

a) Aqui vamos calcular explicitamente a norma do vetor de estado $|\alpha\rangle$ e mostrar que é unitária.

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^\star)^m\alpha^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|n\rangle \\
&= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\
&= e^{-|\alpha|^2}e^{|\alpha|^2} = 1
\end{aligned}$$

onde utilizamos $\langle m|n\rangle = \delta_{m,n}$. Assim concluímos que

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1. \tag{1}$$

b) Vamos provar que o vetor de estado $|\alpha\rangle$ é um autovetor do operador de aniquilação de quanta $\hat{a}$. De fato

$$\begin{aligned}
\hat{a}\,|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}\,|n\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
&= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}\,|n-1\rangle \\
&= \alpha\,|\alpha\rangle
\end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ que define o operador de aniquilação de quanta. Concluímos que

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,, \tag{2}$$

ou seja, o vetor de estado $|\alpha\rangle$ é autovetor do operador $\hat{a}$ com autovalor α.

c) Em termos dos operadores de criação e aniquilação de quanta os operadores hermitianos de posição $\hat{x}$ e momento $\hat{p}$ podem ser escritos como

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) \tag{3}$$

e

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right). \tag{4}$$

Com auxílio da relação

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

facilmente calculamos as médias

$$\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle_\alpha &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger + \hat{a}\,|\alpha\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\alpha^\star + \alpha)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\hat{p}\rangle_\alpha &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger - \hat{a}\,|\alpha\rangle \\
&= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(\alpha^\star - \alpha)\,.
\end{aligned}$$

onde o termo $\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle$ é calculado utilizando-se a propriedade $\left\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\alpha\right\rangle = \langle\hat{a}\alpha|\alpha\rangle$.

Quadrando os operadores (3) e (4) obtemos

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

e

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\right)$$

de modo que

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{x}^2\right\rangle_\alpha &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\alpha|\,\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\alpha^{\star 2} + \alpha^2 + 1 + 2\,|\alpha|^2\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{p}^2\right\rangle_\alpha &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle\alpha|\,\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle \\ &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\left(\alpha^{\star 2} + \alpha^2 - 1 - 2\,|\alpha|^2\right).\end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$\sigma_x^2 = \left\langle\hat{x}^2\right\rangle_\alpha - \langle\hat{x}\rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{5}$$

e

$$\sigma_p^2 = \left\langle\hat{p}^2\right\rangle_\alpha - \langle\hat{p}\rangle_\alpha^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \tag{6}$$

cujo produto fornece

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2} \tag{7}$$

em acordo com o princípio da incerteza. Note que $|\alpha\rangle$ é um estado de incerteza mínima e na literatura recebe o nome de ***estado coerente***.

Exercício 2: Vamos considerar um sistema cujo hamiltoniano é de um oscilador harmônico isotrópico. Os estados estacionários do sistema são auto-estados simultâneos de $\hat{H}$, $\overrightarrow{\hat{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ com autovalores respectivamente iguais a $\hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$, $\hbar^2 l\,(l+1)$, $\hbar m$ e as correspondentes autofunções são da forma

$$\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right) = R_{nl}\left(r\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right).$$

Se denotarmos por H, $\vec{L}^2$ e L_z as ações dos operadores $\hat{H}$, $\hat{\vec{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ no espaço das posições temos

$$H\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right), \tag{8}$$

$$\vec{L}^2\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right) = \hbar^2 l\left(l+1\right)\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right) \tag{9}$$

e

$$L_z\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right) = \hbar m\psi_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right). \tag{10}$$

Estes estados estacionários satisfazem a relação de ortogonalidade:

$$\int d^3\overrightarrow{r}\ \psi^{\star}_{nlm}\left(\overrightarrow{r}\right)\psi_{n'l'm'}\left(\overrightarrow{r}\right) = \delta_{n,n'}\delta_{l,l'}\delta_{m,m'} \tag{11}$$

onde a integração é realizada sobre todo o espaço.

Suponha que o sistema se encontre no estado descrito pela função de onda

$$\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{1}{2}\psi_{110}\left(\overrightarrow{r}\right) + \frac{3}{4}\psi_{311}\left(\overrightarrow{r}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\psi_{31-1}\left(\overrightarrow{r}\right).$$

a) Vamos calcular o valor médio das medidas de energia, $\langle H\rangle$, na situação em que o sistema esteja num estado caracterizado pela função de onda $\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$. Sabemos que

$$\langle H\rangle = \int d^3\overrightarrow{r}\ \Psi^{\star}\left(\overrightarrow{r}\right)H\Psi\left(\overrightarrow{r}\right).$$

Com auxílio da equação de autovalores (8) temos

$$H\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \hbar\omega\left[\frac{5}{4}\psi_{110}\left(\overrightarrow{r}\right) + \frac{27}{8}\psi_{311}\left(\overrightarrow{r}\right) - \frac{9\sqrt{3}}{8}\psi_{31-1}\left(\overrightarrow{r}\right)\right] \tag{12}$$

de modo que, levando em conta a relação de ortogonalidade (11), finalmente obtemos

$$\langle H\rangle = 4\hbar\omega. \tag{13}$$

b) Agora vamos calcular o valor médio das medidas de $\vec{L}^2$. Sabemos que

$$\left\langle \vec{L}^2\right\rangle = \int d^3\overrightarrow{r}\ \Psi^{\star}\left(\overrightarrow{r}\right)L^2\Psi\left(\overrightarrow{r}\right).$$

Com auxílio da equação de autovalores (9) temos

$$\vec{L}^2\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = 2\hbar^2\left[\frac{1}{2}\psi_{110}\left(\overrightarrow{r}\right) + \frac{3}{4}\psi_{311}\left(\overrightarrow{r}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\psi_{31-1}\left(\overrightarrow{r}\right)\right] \tag{14}$$

de modo que, levando em conta a relação de ortogonalidade (11), finalmente obtemos

$$\left\langle \vec{L}^2 \right\rangle = 2\hbar^2. \tag{15}$$

c) Finalmente o valor médio das medidas de L_z. Sabemos que

$$\langle L_z \rangle = \int d^3\overrightarrow{r}\ \Psi^\star\left(\overrightarrow{r}\right) L_z \Psi\left(\overrightarrow{r}\right).$$

Com auxílio da equação de autovalores (10) temos

$$L_z\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{\hbar}{4}\left[3\psi_{311}\left(\overrightarrow{r}\right) + \sqrt{3}\psi_{31-1}\left(\overrightarrow{r}\right)\right] \tag{16}$$

de modo que, levando em conta a relação de ortogonalidade (11), finalmente obtemos

$$\langle L_z \rangle = \frac{3}{8}\hbar. \tag{17}$$

d) Se $\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ for autofunção dos observáveis H, $\vec{L}^2$ e L_z a ação de cada um deles sobre a função de onda deve resultar num múltiplo de $\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ da forma

$$H\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \lambda_H\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) \qquad \vec{L}^2\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \lambda_{\vec{L}^2}\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) \qquad L_z\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = \lambda_{L_z}\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$$

com λ_H, $\lambda_{\vec{L}^2}$ e λ_{L_z} denotando os possíveis autovalores. Da equação (14) facilmente verificamos que

$$\vec{L}^2\Psi\left(\overrightarrow{r}\right) = 2\hbar^2\Psi\left(\overrightarrow{r}\right),$$

ou seja, $\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ é uma autofunção de $\vec{L}^2$ com autovalor $2\hbar^2$. Por outro lado, das equações (12) e (16), verificamos que $\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)$ não é autofunção de H e L_z.

e) Queremos agora calcular a probabilidade de numa medida de energia encontrarmos o valor $\frac{9}{2}\hbar\omega$. Da equação (8) verificamos que todos os estados estacionários de H com $n = 3$ estão associados com o autovalor $\frac{9}{2}\hbar\omega$. Note que tal fato nos mostra que o nível energético $\frac{9}{2}\hbar\omega$ tem uma degenerescência de ordem 10, ou seja, existem 10 estados diferentes do oscilador isotrópico com energia esta energia. Note que para $n = 3$ temos $l = 3$ com $m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ e também temos $l = 1$ com $m = -1, 0, 1$. Assim, a probabilidade de encontrarmos o valor $\frac{9}{2}\hbar\omega$ em medidas de energia é

$$\wp = \sum_{-3\leq m\leq 3}\left|\int d^3\vec{r}\psi^\star_{33m}\left(\overrightarrow{r}\right)\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)\right|^2 + \sum_{-1\leq m\leq 1}\left|\int d^3\vec{r}\psi^\star_{31m}\left(\overrightarrow{r}\right)\Psi\left(\overrightarrow{r}\right)\right|^2$$

o que nos permite concluir, levando em conta a ortogonalidade (11), que só existe a contribuição dos termos $\psi_{311}\left(\overrightarrow{r}\right)$ e $\psi_{31-1}\left(\overrightarrow{r}\right)$. Logo

$$\wp = \left|\frac{3}{4}\right|^2 + \left|-\frac{\sqrt{3}}{4}\right|^2 = \frac{3}{4}$$

ou

$$\wp = 75\%. \tag{18}$$