FMA403- MECÂNICA QUÂNTICA I
Segundo semestre de 2008
Lista de Problemas 6
Data de Entrega: 01/12

1. No átomo de hidrogênio o elétron está no campo coulombiano de um próton. Os estados estacionários do átomo, $|\Psi_{nlm}\rangle$, são auto-estados simultâneos de $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2$ e $\hat{L}_z$, cujas autofunções são da forma:

$$\Psi_{nlm} = R_{nl} Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Seja $\rho_s(r)$, dada por

$$\rho_s(r) = r^2 \int \rho(r, \theta, \phi) d\Omega,$$

a densidade de probabilidade do elétron se encontrar numa casca esférica entre r e $r + dr$.
a) Para um dado l, qual é o estado de mais baixa energia?
b) Para o estado determinado em a), calcule $\rho_s(r)$. Determine os pontos onde ρ_s é máxima e onde ela se anula.
c) No caso clássico e para um dado momento angular L, qual é a órbita do elétron se sua energia é a energia mínima? Existe uma correspondência entre esse estado e o estado quântico determinado em a)?

2. Considere que a hamiltoniana de uma partícula seja igual à:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V\left(\hat{\vec{x}}\right) = \hat{T} + \hat{V}.$$

a) Mostre que

$$\left[\hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{p}}, \hat{H}\right] = i\hbar \left(\frac{\hat{\vec{p}}^2}{m} - \hat{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} V\left(\hat{\vec{x}}\right) \right).$$

b) Se $|\Psi_E\rangle$ é um estado estacionário de $\hat{H}$, use a relação deduzida no item anterior para mostrar que

$$\langle \Psi_E | \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} | \Psi_E \rangle = \frac{1}{2} \langle \Psi_E | \hat{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} V\left(\hat{\vec{x}}\right) | \Psi_E \rangle .$$

c) Como exemplo considere o hamiltoniano do átomo de hidrogênio onde o potencial é coulombiano, $V_c(r) = -\frac{e^2}{r}$. Seja $|\Psi_{nlm}\rangle$ um estado estacionário do átomo de hidrogênio, auto-estado simultâneo de $\hat{H}, \hat{\vec{L}}^2$ e $\hat{L}_z$.
c1) Mostre que $\langle\Psi_{nlm}|\,\hat{T}\,|\Psi_{nlm}\rangle = -\frac{1}{2}\,\langle\Psi_{nlm}|\,V_c\,(r)\,|\Psi_{nlm}\rangle$.
c2) Calcule exatamente o valor médio de $\frac{1}{r}$, ou seja, $\langle\Psi_{nlm}|\,\frac{1}{r}\,|\Psi_{nlm}\rangle$.