

PGF5001- MECÂNICA QUÂNTICA I (2010)

Lista de Problemas 3

Data de Entrega: 20/05

1. (a) Usando a parametrização da matriz de rotação em termos do ângulo de rotação e do eixo de rotação, calcule a matriz de rotação de um ângulo β em torno do eixo Oy' onde,

$$\mathbf{n}_{y'} = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$$

- (b) Mostre que,

$$R_{\mathbf{n}_{y'}} = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z^{-1}(\alpha)$$

2. Uma partícula de spin $1/2$ está no auto-estado de \hat{S}_z com autovalor $\frac{\hbar}{2}$. Se efetuamos uma rotação de β em torno do eixo Oy , calcule:

- (a) O vetor de estado rodado em termos dos auto-estados de \hat{S}_z .
(b) Mostre que o estado rodado é um auto-estado de $\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}$, onde \mathbf{n} é um vetor cujas componentes são, $(\sin \beta, 0, \cos \beta)$.
(c) Se a partícula está no estado rodado, qual é a probabilidade de numa medida de \hat{S}_x acharmos o valor $\frac{\hbar}{2}$? Para que ângulo essa probabilidade é máxima?
(d) Qual é o valor médio do spin no estado rodado e no não-rodado? Interprete o resultado.

3. Considere um sistema de duas partículas com momentos angulares $j_1 = 1$ e $j_2 = 1$, respectivamente.

- (a) Quais são os possíveis valores do momento angular total j ?
(b) Construa os auto-estados do momento angular total e de sua projeção na direção Oz com:
i. $j = 2$ e $m = 1$.
ii. $j = 1$ e $m = 1$.
(c) Se o sistema está no estado $j = 1$ e $m = 1$, qual é a probabilidade de encontrarmos as partículas com $m_1 = 0$ e $m_2 = 1$?

4. Considere um sistema composto de duas partículas de spin $1/2$. Um observador O_1 mede as componentes do spin da partícula 1 e um observador O_2 as componentes do spin da partícula 2.

Suponha que o sistema está no estado,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle_1 \otimes |z-\rangle_2 - |z-\rangle_1 \otimes |z+\rangle_2).$$

- (a) Qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{S}_z(1)$ pelo observador O_1 acharmos um valor igual a $\frac{\hbar}{2}$?
- (b) Qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{S}_x(1)$ pelo observador O_1 acharmos um valor igual a $\frac{\hbar}{2}$?
- (c) Quais são os vetores de estado do sistema após as medidas do observador O_1 ?
- (d) Admita que o observador O_2 faz uma medida de $\hat{S}_z(2)$ e acha um valor igual a $\frac{\hbar}{2}$. Se imediatamente após a medida do observador O_2 o observador O_1 mede
- i. $\hat{S}_z(1)$
 - ii. $\hat{S}_x(1)$,
- qual é a probabilidade de, em cada caso, acharmos valores iguais a $\frac{\hbar}{2}$?
- (e) Comente suas respostas.

5. A Hamiltoniana de uma partícula de spin $3/2$ é dada por:

$$\hat{H} = A(3\hat{S}_z^2 - \hat{\mathbf{S}}^2) + B(\hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2).$$

- (a) Calcule os estados estacionários e os níveis de energia da partícula.
- (b) Existe degenerescência? Ache um conjunto completo de observáveis compatíveis.