PGF5001 - MECÂNICA QUÂNTICA I (2010)
Resolução Comentada da Prova 1
Eduardo T. D. Matsushita

1. Uma partícula de spin 1/2 interage com um campo magnético na direção y de modo que a hamiltoniana é igual a

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_y.$$

(a) A representação de $\hat{H}$ na base formada pelos auto-estados de $\hat{S}_z$ é dada pela matriz,

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos denotar por $|E\rangle$ um particular autovetor de $\hat{H}$ associado ao autovalor E, ou seja,

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle.$$

Se na base $\{|z,+\rangle, |z,-\rangle\}$ esse autovetor é escrito da forma

$$|E\rangle = a|z,+\rangle + b|z,-\rangle \to \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

com a e b sendo coeficientes complexos, a equação de autovalores é dada por

$$\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{2E}{\hbar\omega} & -i \\ i & -\frac{2E}{\hbar\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Note que temos um sistema linear homogêneo. Para admitir soluções não-triviais devemos ter

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{2E}{\hbar\omega} & -i \\ i & -\frac{2E}{\hbar\omega} \end{pmatrix} = 0,$$

implicando que

$$\boxed{E = \pm\frac{\hbar\omega}{2}.} \tag{1}$$

Observe que os autovalores são reais como era de se esperar pois $\hat{H}$ é um operador hermiteano. Agora vamos determinar os autovetores normalizados de $\hat{H}$.

i. $E = \frac{\hbar\omega}{2} \quad \to \quad \hat{H}|\hbar\omega/2\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|\hbar\omega/2\rangle$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Temos o sistema:
$$\begin{cases} b = ia \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}, \tag{2}$$
onde escolhemos a fase de modo que
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
e
$$b = \frac{i}{\sqrt{2}}$$
Assim:
$$\boxed{|\hbar\omega/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle + i|z,-\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.} \tag{3}$$

ii. $E = -\frac{\hbar\omega}{2} \quad \rightarrow \quad \hat{H}|-\hbar\omega/2\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|-\hbar\omega/2\rangle$:
$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$
Temos o sistema:
$$\begin{cases} b = -ia \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}, \tag{4}$$
onde a fase foi escolhida de modo que
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
e
$$b = -\frac{i}{\sqrt{2}}$$
Assim:
$$\boxed{|-\hbar\omega/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle - i|z,-\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.} \tag{5}$$
De um cálculo direto temos,
$$\langle\hbar\omega/2|-\hbar\omega/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0,$$
mostrando que os autovetores obtidos são ortogonais.

(b) Se no instante inicial, $t = 0$, o estado da partícula é um auto-estado de $\hat{S}_z$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$, o estado da partícula no instante t é obtido por

$$|z,+;t\rangle = \hat{U}(t,0)|z,+\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|z,+\rangle.$$

Para calcular a ação do operador de evolução temporal sobre o vetor de estado inicial devemos expandir o vetor $|z,+\rangle$ na base formada pelos auto-estados da hamiltoniana,

$$|z,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hbar\omega/2\rangle + |-\hbar\omega/2\rangle).$$

Nessas condições, explorando a relação $\hat{H}|\pm\hbar\omega/2\rangle = \pm\hbar\omega/2|\pm\hbar\omega/2\rangle$, resulta:

$$\boxed{|z,+;t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|\hbar\omega/2\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|-\hbar\omega/2\rangle)} \tag{6a}$$

ou

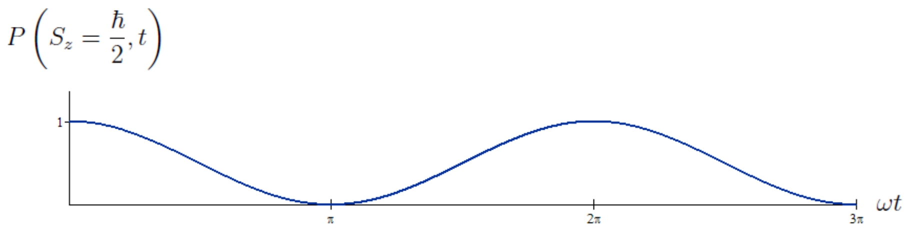
$$\boxed{|z,+;t\rangle = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)|z,+\rangle + \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)|z,-\rangle.} \tag{6b}$$

(c) A probabilidade de numa medida de $\hat{S}_z$ no instante t, obtermos o valor $\frac{\hbar}{2}$ é dada por

$$P\left(S_z = \frac{\hbar}{2}, t\right) = |\langle z,+|z,+;t\rangle|^2.$$

Portanto

$$\boxed{P\left(S_z = \frac{\hbar}{2}, t\right) = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right).} \tag{7}$$



Pela análise do gráfico acima podemos verificar que a orientação do spin muda periodicamente com o tempo. Note que nos instantes $\omega t_n = (2n+1)\pi$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$ ocorre inversão completa do spin pois a probabilidade de se obter $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ é igual a 1.

(d) Vamos supor que fazemos medidas de $\hat{S}_z$, num ensemble de N_0 partículas, e que essas medidas selecionam apenas as partículas com $S_z = \frac{\hbar}{2}$. Note que no instante da medida, $t_0 = \frac{2\pi}{3\omega}$, o estado do sistema colapsa para o autoestado $|z,+\rangle$ e passa a evoluir no tempo tomando agora esse estado como estado inicial (lógico em $t = t_0$). Dessa forma o vetor de estado para $t > t_0$ é obtido de

$$|t > t_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|z,+\rangle$$

que nos dá

$$\boxed{|t > t_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega(t-t_0)}{2}}|\hbar\omega/2\rangle + e^{\frac{i\omega(t-t_0)}{2}}|-\hbar\omega/2\rangle)} \tag{8a}$$

ou

$$\boxed{|t > t_0\rangle = \cos\left(\frac{\omega\,(t-t_0)}{2}\right)|z,+\rangle + \sin\left(\frac{\omega\,(t-t_0)}{2}\right)|z,-\rangle.} \tag{8b}$$

Agora a probabilidade de obter $S_x = \frac{\hbar}{2}$ num intante posterior a t_0 é igual a

$$P'\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t > t_0\right) = \cos^2\left(\frac{\omega\left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right)}{2}\right).$$

O número de partículas com essa projeção será nulo nos instantes posteriores a t_0 onde ocorre inversão de população, ou seja, nos instantes tais que $P'\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t > t_0\right) = 0$ ou mais especificamente:

$$\boxed{\omega t_n = \left(2n + \frac{5}{3}\right)\pi, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots} \tag{9}$$

Comparando o resultado acima com o resultado obtido no item (c) verificamos a existência de uma medida intermediária afeta a estatística de medidas do observável $\hat{S}_z$ e isso se reflete no deslocamento dos instantes de tempo que ocorre a inversão de população do sistema.

2. Uma partícula de massa m está sujeita à ação de um potencial de um oscilador harmônico unidimensional de frequência ω_0. Suponha que no instante inicial, $t = 0$, a partícula esteja no estado $|p_0\rangle$,

$$|p_0\rangle = e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}|0\rangle,$$

onde $|0\rangle$ é o estado fundamental da hamiltoniana do oscilador harmônico e $\hat{x}$ é o operador posição.

   (a) Vamos determinar a função de onda, $\langle x|p_0\rangle$, associada ao vetor de estado $|p_0\rangle$ no espaço das posições:

$$\langle x|p_0\rangle = \langle x|e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}|0\rangle.$$

   Levando em conta que a ação de $\hat{x}$ no espaço das posições é uma multiplicação por x, $\langle x|\hat{x}|\alpha\rangle = x\langle x'|\alpha\rangle$, segue que

$$\langle x|p_0\rangle = e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}\langle x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}a_0}}e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}.$$

Assim a função de onda do estado $|p_0\rangle$ no espaço das posições é:

$$\boxed{\langle x|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}a_0}} e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}},}$$

que é um pacote gaussiano multiplicado por uma fase.

(b) Para mostrar que $|p_0\rangle$ é um *estado coerente* basta provar que tal vetor de estado é um auto-estado do operador de aniquilação de quanta de oscilador, $\hat{a}$. Para isto, vamos calcular explicitamente a ação do operador $\hat{a}$ sobre o vetor $|p_0\rangle$:

$$\hat{a}|p_0\rangle = \hat{a} e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}|0\rangle = [\hat{a}, e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}]|0\rangle,$$

onde utilizamos o fato de que $\hat{a}e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}} = [\hat{a}, e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}] + e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}\hat{a}$ e que $\hat{a}|0\rangle = 0$. Devemos calcular o comutador $[\hat{a}, e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}]$:

$$[\hat{a}, e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{a_0} + i\frac{\hat{p}}{\hbar}a_0\right), e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}\right] = i\frac{a_0}{\hbar\sqrt{2}}[\hat{p}, e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}] = \frac{ip_0 a_0}{\sqrt{2}\hbar} e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}},$$

pois $[\hat{x}, F(\hat{x})] = 0$ e $[\hat{p}, F(\hat{x})] = -i\hbar\frac{dF}{dx}$. Assim, obtemos:

$$\hat{a}|p_0\rangle = \frac{ip_0 a_0}{\sqrt{2}\hbar} e^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}|0\rangle = \frac{ip_0 a_0}{\sqrt{2}\hbar}|p_0\rangle.$$

O resultado

$$\boxed{\hat{a}|p_0\rangle = \frac{ip_0 a_0}{\sqrt{2}\hbar}|p_0\rangle} \tag{10}$$

mostra que $|p_0\rangle$ é um auto-estado do operador de aniquilação de quanta, $\hat{a}$, com autovalor $\frac{ip_0 a_0}{\sqrt{2}\hbar}$ e portanto um estado coerente.

(c) O comutador $[\hat{p}, e^{\frac{i}{\hbar}p_0\hat{x}}]$ foi calculado explicitamente no item anterior. Com o uso direto da relação $[\hat{p}, F(\hat{x})] = -i\hbar\frac{dF}{dx}$ obtemos:

$$\boxed{[\hat{p}, e^{\frac{i}{\hbar}p_0\hat{x}}] = p_0 e^{\frac{i}{\hbar}p_0\hat{x}}.} \tag{11}$$

(d) Vamos calcular o valor médio das medidas de posição e momento no instante inicial, $t = 0$. Em termos dos operadores de criação e aniquilação de quanta de oscilador os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ podem ser escritos como

$$\hat{x} = \frac{a_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

e

$$\hat{p} = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Com auxílio da relação $\hat{a}|p_0\rangle = z|p_0\rangle$, com $z \equiv \frac{ip_0 a_0}{\sqrt{2}\hbar}$, facilmente calculamos as médias

$$\langle \hat{x} \rangle = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \langle p_0 | \hat{a}^\dagger + \hat{a} | p_0 \rangle = \frac{a_0}{\sqrt{2}} (z^\star + z) = 0$$

e

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}} \langle p_0 | \hat{a}^\dagger - \hat{a} | p_0 \rangle = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}} (z^\star - z) = p_0.$$

Portanto:

$$\boxed{\langle \hat{x} \rangle = 0, \qquad \langle \hat{p} \rangle = p_0.} \tag{12}$$

(e) Queremos determinar o valor médio das medidas de posição num instante t na *descrição de Heisenberg.* O primeiro passo é determinar o operador $\hat{a}(t)$ (e consequentemente o operador $\hat{a}^\dagger(t)$), resolvendo a equação de movimento de Heisenberg:

$$i\hbar \frac{d\hat{a}}{dt}(t) = [\hat{a}(t), \hat{H}(t)],$$

onde

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

é a hamiltoniana do oscilador harmônico unidimensional de frequência ω_0 em termos dos operadores de criação e aniquilação de quanta. Levando em conta que na descrição de Heisenberg as relações de comutação para tempos iguais são invariantes e que a hamiltoniana é independente do tempo, o que nos permite tomá-la no instante t, a equação de Heisenberg fica igual a:

$$\frac{d\hat{a}}{dt}(t) = -i\omega_0 \hat{a}(t),$$

com condição inicial $\hat{a}(0) = \hat{a}$. A solução satisfazendo a condição inicial é,

$$\hat{a}(t) = \hat{a} e^{-i\omega_0 t}.$$

Naturalmente, usando as expressões de $\hat{x}$ e $\hat{p}$ em termos dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$,

$$\hat{x} = \frac{a_0}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{a_0} \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}),$$

determinamos $\hat{x}(t)$:

$$\hat{x}(t) = \hat{x} \cos \omega_0 t + \frac{\hat{p}}{m\omega} \sin \omega_0 t.$$

Calculando o valor médio de $\hat{x}(t)$ temos:

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = \langle p_0 | \hat{x}(t) | p_0 \rangle = \langle \hat{x} \rangle \cos \omega_0 t + \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m\omega} \sin \omega_0 t = \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega_0 t,$$

onde utilizamos os resultados obtidos anteriormente $\langle \hat{x} \rangle = 0$ e $\langle \hat{p} \rangle = p_0$. Portanto,

$$\boxed{\langle \hat{x}(t) \rangle = \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega_0 t.} \tag{13}$$

(f) A probabilidade de numa medida da energia da partícula no instante inicial acharmos o valor $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, que corresponde a energia do estado fundamental, é dada por:

$$P\left(E=\frac{1}{2}\hbar\omega_0, t=0\right) = |\langle 0|p_0\rangle|^2.$$

Vamos calcular explicitamente a amplitude $\langle 0|p_0\rangle$ no espaço das posições:

$$\langle 0|p_0\rangle = \int dx \langle 0|x\rangle\langle x|p_0\rangle = \int dx\ e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}|\langle x|0\rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0}\int dx\ e^{-\frac{x^2}{a_0^2}+\frac{ip_0x}{\hbar}} = e^{-\frac{p_0^2a_0^2}{4\hbar^2}},$$

e consequentemente

$$\boxed{P\left(E=\frac{1}{2}\hbar\omega_0, t=0\right) = e^{-\frac{p_0^2a_0^2}{2\hbar^2}}.} \tag{14}$$

Num instante $t>0$ essa probabilidade é dada por:

$$P\left(E=\frac{1}{2}\hbar\omega_0, t>0\right) = |\langle 0|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|p_0\rangle|^2.$$

Uma vez que $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|0\rangle = e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}}|0\rangle$, verificamos que

$$\langle 0|e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|p_0\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}\langle 0|p_0\rangle,$$

ou seja, a dependência temporal aparece como uma fase de modo que

$$\boxed{P\left(E=\frac{1}{2}\hbar\omega_0, t>0\right) = P\left(E=\frac{1}{2}\hbar\omega_0, t=0\right) = e^{-\frac{p_0^2a_0^2}{2\hbar^2}}.} \tag{15}$$

Esse resultado nos revela que a probabilidade é conservada.