PGF5001 - MECÂNICA QUÂNTICA I (2010)
Resolução Comentada da Lista de Problemas 2
Eduardo T. D. Matsushita

1. Considere um espaço de vetores de estado bi-dimensional e uma base neste espaço, $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, formada pelos autovetores do observável $\hat{A}$:

$$\hat{A}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle$$
$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle$$

A representação do operador hamiltoniana, $\hat{H}$, nesta base é:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Vamos denotar por $|E\rangle$ um particular autovetor de $\hat{H}$ associado ao autovalor E, ou seja,

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle.$$

Se na base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ esse autovetor é escrito da forma

$$|E\rangle = x|a_1\rangle + y|a_2\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

com x e y sendo coeficientes complexos, a equação de autovalores é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} -E & \delta \\ \delta & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Note que temos um sistema linear homogêneo. Para admitir soluções não-triviais devemos ter

$$\det\begin{pmatrix} -E & \delta \\ \delta & -E \end{pmatrix} = 0,$$

implicando que

$$\boxed{E = \pm\delta.} \tag{1}$$

Agora vamos determinar os autovetores normalizados de $\hat{H}$.

i. $E = \delta \quad \rightarrow \quad \hat{H}|\delta\rangle = \delta|\delta\rangle$:

$$\begin{pmatrix} -\delta & \delta \\ \delta & -\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} x = y \\ |x|^2 + |y|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}, \tag{2}$$

com a fase escolhida de modo que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Assim:

$$\boxed{|\delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle + |a_2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.} \tag{3}$$

ii. $E = -\delta \quad \rightarrow \quad \hat{H}|-\delta\rangle = -\delta|-\delta\rangle$:

$$\begin{pmatrix} \delta & \delta \\ \delta & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} -x = y \\ |x|^2 + |y|^2 = 1 \quad \text{(normalização)} \end{cases}, \tag{4}$$

com a fase escolhida de modo que

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Assim:

$$\boxed{|-\delta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle - |a_2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.} \tag{5}$$

(b) Se o sistema está no estado $|a_1\rangle$ no instante $t = 0$, o vetor de estado do sistema no instante t, $|a_1, t\rangle$, é obtido por

$$|a_1, t\rangle = \hat{U}(t, 0)|a_1\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|a_1\rangle.$$

Para calcular a ação do operador de evolução temporal sobre o vetor de estado inicial devemos expandir o vetor $|a_1\rangle$ na base formada pelos auto-estados da energia,

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\delta\rangle + |-\delta\rangle).$$

Nessas condições, explorando a relação $\hat{H}|\pm\delta\rangle = \pm\delta|\pm\delta\rangle$, resulta:

$$\boxed{|a_1,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t}|\delta\rangle + e^{\frac{i}{\hbar}\delta t}|-\delta\rangle)} \tag{6a}$$

ou

$$\boxed{|a_1,t\rangle = \cos\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)|a_1\rangle - i\sin\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)|a_2\rangle.} \tag{6b}$$

(c) A probabilidade de achar o sistema no estado $|a_2\rangle$ no instante t é dada por

$$P(a_2,t) = |\langle a_2|a_1,t\rangle|^2.$$

Portanto

$$\boxed{P(a_2,t) = \sin^2\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right).} \tag{7}$$

(d) Vamos calcular primeiramente a dispersão das medidas $\hat{H}$ no instante t,

$$\sigma_H^2 = \langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2.$$

Para este cálculo utilizaremos as representações do vetor de estado $|a_1,t\rangle$ e de $\hat{H}$ na base $\{|\delta\rangle, |-\delta\rangle\}$. Temos:

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle a_1,t|\hat{H}|a_1,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\delta t} & e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & -\delta\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t}\\ e^{\frac{i}{\hbar}\delta t}\end{pmatrix} = 0$$

e

$$\langle\hat{H}^2\rangle = \langle a_1,t|\hat{H}^2|a_1,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\delta t} & e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta^2 & 0\\ 0 & \delta^2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t}\\ e^{\frac{i}{\hbar}\delta t}\end{pmatrix} = \delta^2.$$

Observe que os valores médios de $\hat{H}$ e $\hat{H}^2$ são independentes do tempo. Assim

$$\boxed{\sigma_H^2 = \delta^2.} \tag{8}$$

Agora calcularemos a dispersão das medidas de $\hat{A}$ no instante t,

$$\sigma_A^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2.$$

Para este cálculo utilizaremos as representações do vetor de estado $|a_1,t\rangle$ e de $\hat{A}$ na base $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$. Facilmente calculamos

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle &= \langle a_1,t|\hat{A}|a_1,t\rangle = \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right) & i\sin\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)\\ -i\sin\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)\end{pmatrix}\\ &= \frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1-a_2}{2}\cos\left(\frac{2\delta}{\hbar}t\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}^2\rangle &= \langle a_1,t|\hat{A}^2|a_1,t\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right) & i\sin\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right) \\ -i\sin\left(\frac{\delta}{\hbar}t\right)\end{pmatrix} \\ &= \frac{a_1^2+a_2^2}{2}+\frac{a_1^2-a_2^2}{2}\cos\left(\frac{2\delta}{\hbar}t\right).\end{aligned}$$

Assim:

$$\boxed{\sigma_A^2 = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{2\delta}{\hbar}t\right).} \tag{9}$$

Para verificar a validade do princípio da incerteza *energia* $\times$ *tempo* precisamos calcular o tempo característico τ_A:

$$\tau_A^2 = \frac{\sigma_A^2}{\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|^2} = \frac{\hbar^2}{4\delta^2}.$$

Multiplicando a dispersão das medidas de energia pelo tempo característico obtemos

$$\boxed{\sigma_A^2\tau_A^2 = \frac{\hbar^2}{4},} \tag{10}$$

compatível com o princípio da incerteza energia-tempo e o produto assume o valor mínimo.

2. Considere uma partícula livre cujo estado no instante $t=0$ é um *pacote gaussiano* dado por:

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}.$$

Queremos determinar as dispersões das medidas de posição e de momento num instante t na *descrição de Heisenberg.* O primeiro passo é determinar os operadores $\hat{x}(t)$ e $\hat{p}(t)$ resolvendo as equações de movimento de Heisenberg:

$$i\hbar\frac{d\hat{p}}{dt}(t) = [\hat{p}(t),\hat{H}(t)] \qquad i\hbar\frac{d\hat{x}}{dt}(t) = [\hat{x}(t),\hat{H}(t)],$$

onde

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

é a hamiltoniana da partícula livre. Levando em conta que na descrição de Heisenberg as relações de comutação para tempos iguais são invariantes e que a hamiltoniana é independente do tempo, o que nos permite tomá-la no instante t, as equações de Heisenberg ficam iguais à:

$$\frac{d\hat{p}}{dt}(t) = 0 \qquad \frac{d\hat{x}}{dt}(t) = \frac{\hat{p}(t)}{m},$$

com condição inicial $\hat{x}(0) = \hat{x}$ e $\hat{p}(0) = \hat{p}$. A primeira equação revela que:

$$\boxed{\hat{p}(t) = \hat{p},}$$

ou seja, o momento é uma constante do movimento. A segunda equação nos conduz à:

$$\boxed{\hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{\hat{p}}{m}t.}$$

Outro aspecto relevante é o fato de que o estado inicial da partícula livre é um pacote gaussiano. Sabemos que gaussiana é a função de onda do estado fundamental de um oscilador harmônico com comprimento igual a a_0 e isso nos permite fazer a associação $|\alpha\rangle \leftrightarrow |0\rangle$, com $|0\rangle$ sendo o vetor de estado sem nenhum quanta de oscilador. Tal fato nos permite utilizar a álgebra dos operadores de criação e aniquilação de quanta de oscilador, $\hat{a}^\dagger$ e $\hat{a}$, para fazer os cálculos dos valores médios de $\hat{x}(t)$, $\hat{x}^2(t)$, $\hat{p}(t)$ e $\hat{p}^2(t)$ em relação ao estado $|\alpha\rangle$.

(a) Vamos começar calculando a dispersão das medidas de posição num instante t,

$$\sigma_x^2(t) = \langle \hat{x}^2(t)\rangle - \langle \hat{x}(t)\rangle^2.$$

Levando em conta que $\hat{x} = \frac{a_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ e $\hat{p} = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ podemos escrever

$$\hat{x}(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \frac{i\hbar}{ma_0\sqrt{2}}t(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

e

$$\hat{x}^2(t) = \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \frac{i\hbar}{ma_0\sqrt{2}}t\right)^2 \hat{a}^{\dagger 2} + \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} - \frac{i\hbar}{ma_0\sqrt{2}}t\right)^2 \hat{a}^2 + \left(\frac{a_0^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m^2a_0^2}t^2\right)(1+2\hat{a}^\dagger\hat{a}).$$

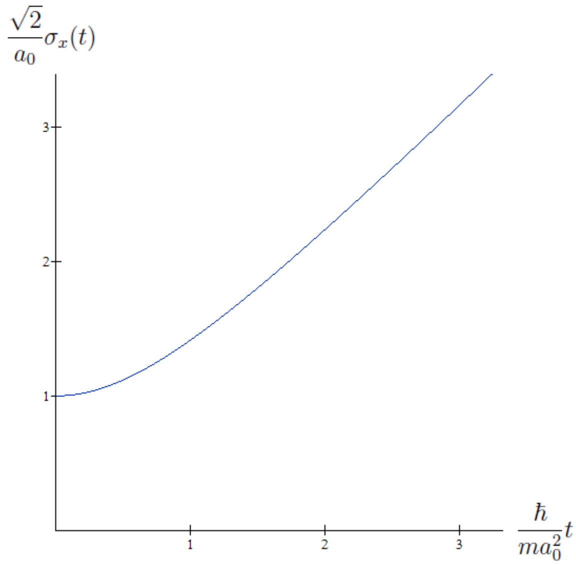
Assim:

$$\langle \hat{x}(t)\rangle = \frac{a_0}{\sqrt{2}}\langle 0|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|0\rangle + \frac{i\hbar}{ma_0\sqrt{2}}t\langle 0|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})|0\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}^2(t)\rangle = &\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \frac{i\hbar}{ma_0\sqrt{2}}t\right)^2 \langle 0|\hat{a}^{\dagger 2}|0\rangle + \left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} - \frac{i\hbar}{ma_0\sqrt{2}}t\right)^2 \langle 0|\hat{a}^2|0\rangle \\ &+ \left(\frac{a_0^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m^2a_0^2}t^2\right)\langle 0|(1+2\hat{a}^\dagger\hat{a})|0\rangle = \frac{a_0^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m^2a_0^2}t^2,\end{aligned}$$

de modo que

$$\boxed{\sigma_x^2(t) = \frac{a_0^2}{2}\left(1 + \frac{\hbar^2}{m^2a_0^4}t^2\right).} \tag{11}$$



ou

$$\boxed{\sigma_x(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\hbar^2}{m^2a_0^4}t^2}.} \tag{12}$$

A dispersão $\sigma_x(t)$ é uma função dependente do tempo e ela quantifica o alargamento do pacote gaussiano como função do tempo.

(b) Agora calcularemos $\sigma_p^2(t)$:

$$\sigma_p^2(t) = \langle \hat{p}^2(t)\rangle - \langle \hat{p}(t)\rangle^2.$$

Levando em conta que $\hat{p} = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ podemos escrever

$$\hat{p}(t) = \hat{p} = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$$

e

$$\hat{p}^2(t) = -\frac{\hbar^2}{2a_0^2}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - 1 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a}).$$

Assim:

$$\langle \hat{p}(t)\rangle = \frac{i\hbar}{a_0\sqrt{2}}\langle 0|(\hat{a}^\dagger - \hat{a})|0\rangle = 0$$

e

$$\langle \hat{p}^2(t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2a_0^2}\langle 0|(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - 1 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a})|0\rangle = \frac{\hbar^2}{2a_0^2},$$

de modo que

$$\boxed{\sigma_p^2(t) = \frac{\hbar^2}{2a_0^2}.} \tag{13}$$

(c) O produto $\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t)$ assume a forma explícita

$$\boxed{\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t) = \frac{\hbar^2}{4}\left(1 + \frac{\hbar^2}{m^2 a_0^4}t^2\right).} \tag{14}$$

Observe que o princípio da incerteza é sempre satisfeito pois $1+\frac{\hbar^2}{m^2a_0^4}t^2 \geq 1$ para todo $t \geq 0$. Além disso verificamos que no instante $t = 0$ a relação de incerteza é mínima.

3. A hamiltoniana de uma partícula de spin 1/2 num campo magnético uniforme na direção Oz é dada por

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z.$$

(a) As equações de movimento de Heisenberg para os operadores $\hat{S}_x(t)$, $\hat{S}_y(t)$ e $\hat{S}_z(t)$ são dadas, respectivamente, por

$$i\hbar\frac{d\hat{S}_x(t)}{dt} = [\hat{S}_x(t), \hat{H}(t)], \qquad i\hbar\frac{d\hat{S}_y(t)}{dt} = [\hat{S}_y(t), \hat{H}(t)], \qquad i\hbar\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt} = [\hat{S}_z(t), \hat{H}(t)],$$

com condições iniciais: $\hat{S}_x(0) = \hat{S}_x$, $\hat{S}_y(0) = \hat{S}_y$ e $\hat{S}_z(0) = \hat{S}_z$. Levando em conta que na descrição de Heisenberg as relações de comutação para tempos iguais são invariantes e que a hamiltoniana é independente do tempo, o que nos permite tomá-la no instante t e também as relações de comutação $[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}\hat{S}_l$, as equações de Heisenberg ficam iguais à:

$$\frac{d\hat{S}_x(t)}{dt} = -\omega\hat{S}_y(t), \tag{15a}$$

$$\frac{d\hat{S}_y(t)}{dt} = \omega\hat{S}_x(t), \tag{15b}$$

$$\frac{d\hat{S}_z(t)}{dt} = 0. \tag{15c}$$

Derivando ambos os membros da Eq.(15a) com relação ao tempo e comparando com a Eq.(15b) obtemos

$$\frac{d^2\hat{S}_x(t)}{dt^2} = -\omega^2\hat{S}_x(t),$$

cuja solução geral é

$$\hat{S}_x(t) = \hat{A}\cos\omega t + \hat{B}\sin\omega t.$$

A solução geral depende de dois operadores constantes que são determinados pelas duas condições iniciais,

$$\hat{S}_x(0) = \hat{S}_x, \qquad \frac{d\hat{S}_x(0)}{dt} = -\omega\hat{S}_y(0),$$

a última como consequência da equação de movimento. Assim, identificamos $\hat{A} = \hat{S}_x$ e $\hat{B} = -\hat{S}_y$, de modo que

$$\boxed{\hat{S}_x(t) = \hat{S}_x \cos\omega t - \hat{S}_y \sin\omega t} \tag{16}$$

e

$$\boxed{\hat{S}_y(t) = \hat{S}_x \sin\omega t + \hat{S}_y \cos\omega t.} \tag{17}$$

Da Eq.(15c) facilmente obtemos

$$\boxed{\hat{S}_z(t) = \hat{S}_z.} \tag{18}$$

(b) Queremos determinar o valor médio das medidas de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ no instante t na descrição de Heisenberg sendo que no instante $t = 0$ a partícula está no estado

$$|\alpha\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|z,+\rangle + \frac{1}{2}|z,-\rangle.$$

Com auxílio das matrizes que representam dos operadores $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ na base formada pelos auto-estados de $\hat{S}_z$,

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

seguem de (15a), (15b) e (15c) que

$$S_x(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad S_y(t) = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad S_z(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nessas condições temos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_x(t) \rangle &= \langle \alpha | \hat{S}_x(t) | \alpha \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar\sqrt{3}}{4} \cos\omega t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_y(t) \rangle &= \langle \alpha | \hat{S}_y(t) | \alpha \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar\sqrt{3}}{4} \sin\omega t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_z(t) \rangle &= \langle \alpha | \hat{S}_z(t) | \alpha \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{4}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\langle \hat{S}_x(t)\rangle = \frac{\hbar\sqrt{3}}{4}\cos\omega t, \qquad \langle \hat{S}_y(t)\rangle = \frac{\hbar\sqrt{3}}{4}\sin\omega t, \qquad \langle \hat{S}_z(t)\rangle = \frac{\hbar}{4}.} \tag{19}$$

Esse exercício ilustra a **precessão de Larmor**. Um vetor genérico $\mathbf{A}(t)$ que precessiona em torno de um eixo satisfaz a equação

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}(t),$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular de precessão. Nessas condições, verificamos que

$$\frac{d\langle \hat{\mathbf{S}}\rangle}{dt} = -\frac{\hbar\sqrt{3}}{4}\omega \sin\omega t\ \mathbf{e}_x + \frac{\hbar\sqrt{3}}{4}\omega\cos\omega t\ \mathbf{e}_y = \omega\ \mathbf{e}_z \times \langle \hat{\mathbf{S}}\rangle,$$

que nos permite concluir que $\langle \hat{\mathbf{S}}\rangle$ precessiona em torno da direção do campo magnético, Oz, com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\ \mathbf{e}_z$. O ângulo formado com a direção do campo magnético é tal que:

$$\cos\theta = \frac{\langle \hat{S}_z(t)\rangle}{||\langle \hat{\mathbf{S}}\rangle||} = \frac{1}{2}$$

e portanto

$$\boxed{\theta = 60^{\text{o}}.} \tag{20}$$

4. Uma partícula de spin 1/2 interage com um campo magnético na direção Oz de modo que a hamiltoniana é igual a,

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z.$$

(a) Se no instante $t = 0$ o estado da partícula é o auto-estado de $\hat{S}_x$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$, que denotaremos por $|x,+\rangle$, o vetor de estado do sistema no instante t é obtido por

$$|t\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)|x,+\rangle.$$

Como a hamiltoniana é um operador proporcional a $\hat{S}_z$ facilmente verificamos que $|z,+\rangle$ e $|z,-\rangle$ são auto-estados da energia:

$$\hat{H}|z,+\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|z,+\rangle \qquad \hat{H}|z,-\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|z,-\rangle.$$

Levando em conta que a expansão $|x,+\rangle$ na base formada pelos auto-estados da hamiltoniana é

$$|x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle + |z,-\rangle),$$

resulta:

$$\boxed{|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega t}{2}}|z,+\rangle + e^{\frac{i\omega t}{2}}|z,-\rangle)} \tag{21a}$$

ou

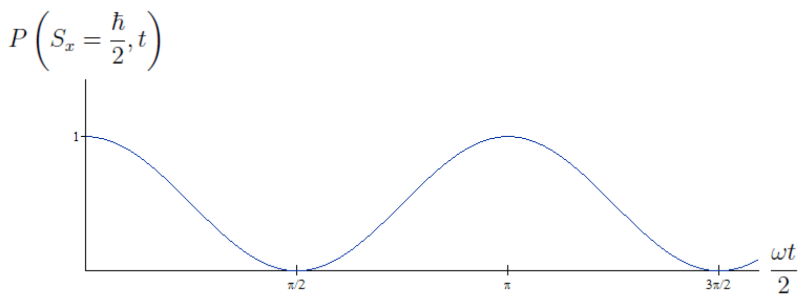
$$\boxed{|t\rangle = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)|x,+\rangle - i\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)|x,-\rangle.} \tag{21b}$$

(b) A probabilidade de numa medida de $\hat{S}_x$ no instante t, obtermos o valor $\frac{\hbar}{2}$ é dada por

$$P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t\right) = |\langle x,+|t\rangle|^2.$$

Portanto

$$\boxed{P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t\right) = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right).} \tag{22}$$



Pela análise do gráfico acima podemos verificar que a orientação do spin muda periodicamente com o tempo. Note que nos instantes $t_n = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega}$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$ ocorre inversão completa do spin pois a probabilidade de se obter $S_x = -\frac{\hbar}{2}$ é igual a 1.

(c) Para calcular o valor médio das medidas de $\hat{S}_x$ no instante t utilizaremos as representações do vetor de estado $|t\rangle$ e de $\hat{S}_x$ na base formada pelos auto-estados de $\hat{S}_x$. Facilmente calculamos

$$\begin{aligned}\langle \hat{S}_x \rangle &= \langle t|\hat{S}_x|t\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2}\cos\omega t.\end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{\langle \hat{S}_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t.} \tag{23}$$

(d) Aqui ilustraremos o princípio da redução do pacote de onda. No instante $t = 0$ o sistema se encontrava no estado caracaterizado pelo vetor $|x, +\rangle$. A evolução temporal do sistema para $t > 0$ foi determinada no item a) deste exercício. Suponha agora que no instante $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ foi obtido o valor $\frac{\hbar}{2}$ numa medida do observável $\hat{S}_x$. A pergunta que se faz é: como caracterizamos agora a evolução dinâmica do sistema para $t > t_1$? A resposta é simples: pelo princípio da redução do pacote de onda, no instante da medida o estado do sistema colapsa para o autoestado $|x, +\rangle$. Logo, para instantes posteriores a t_1, o sistema passa a evoluir no tempo tomando agora como estado inicial (lógico em $t = t_1$) o autoestado $|x, +\rangle$, ou seja,

$$|t > t_1\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\left(t - t_1\right)\right)|x, +\rangle$$

que nos dá

$$\boxed{|t > t_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-\frac{i\omega(t-t_1)}{2}}|z, +\rangle + e^{\frac{i\omega(t-t_1)}{2}}|z, -\rangle)} \tag{24a}$$

ou

$$\boxed{|t > t_1\rangle = \cos\left(\frac{\omega\left(t - t_1\right)}{2}\right)|x, +\rangle - i\sin\left(\frac{\omega\left(t - t_1\right)}{2}\right)|x, -\rangle.} \tag{24b}$$

Note que o vetor de estado obtido é uma translação no tempo do estado $|t\rangle$. É como se no instante da medida o sistema perdesse a "memória" anterior a $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ e começasse a evoluir no tempo tomando como estado inicial o autoestado $|x, +\rangle$.

(e) Nesse item queremos ilustrar como se dá o processo de medidas sucessivas num sistema com evolução temporal. Sabemos que o vetor de estado do sistema no instante t é dado por (21b). A probabilidade de no instante $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ acharmos o valor $\frac{\hbar}{2}$ numa medida de $\hat{S}_x$ pode ser obtida com auxílio do resultado (22) e é igual a:

$$P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = t_1\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Note que no instante da medida o estado do sistema colapsa para o autoestado $|x, +\rangle$ e passa a evoluir no tempo tomando agora esse estado como estado inicial (lógico em $t = t_1$). Dessa forma o vetor de estado para $t > t_1$ é o vetor (24b). Agora a probabilidade de obter $S_x = \frac{\hbar}{2}$ num intante posterior a t_1 é igual a

$$P'\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t > t_1\right) = \cos^2\left(\frac{\omega\left(t - \frac{\pi}{2\omega}\right)}{2}\right),$$

de modo que em $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$ temos:

$$P'\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = t_2\right) = \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Logo a probabilidade de em medidas sucessivas de $\hat{S}_x$ nos instantes $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ e $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, acharmos valores iguais a $\frac{\hbar}{2}$ é

$$\boxed{P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = t_1\right) P'\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = t_2\right) = \frac{1}{4} = 25\%.} \tag{25}$$

(f) Por outro lado, se não fizessemos a medida no instante t_1, a probabilidade de acharmos um valor igual a $\frac{\hbar}{2}$ numa medida de $\hat{S}_x$ no instante t_2 pode ser calculada diretamente de (22):

$$\boxed{P\left(S_x = \frac{\hbar}{2}, t = t_2\right) = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0.} \tag{26}$$

Comparando o resultado acima com o resultado obtido no item (e) verificamos a existência de uma medida intermediária afeta a estatística de medidas do observável $\hat{S}_x$. No caso apresentado em (e) verificamos que a medida realizada no instante t_1 torna a probabilidade de obter $S_x = \frac{\hbar}{2}$ no instante t_2 finita e igual a 50%. Por outro lado, sem a existência da medida intermediária essa probabilidade é identicamente nula.

5. A hamiltoniana de um elétron na presença de um campo magnético é dada por

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ é o momento magnético do elétron,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{|e|}{mc}\hat{\mathbf{S}},$$

e $\mathbf{B}$ é um campo magnético oscilante na direção z,

$$\mathbf{B} = B_0 \cos\omega t \; \mathbf{e}_z.$$

Observe que aqui a dinâmica do sistema é descrita por uma hamiltoniana dependente do tempo, ou seja,

$$\hat{H}(t) = \frac{|e|}{mc} B_0 \hat{S}_z \cos\omega t.$$

(a) Se no instante $t = 0$ o elétron tem projeção igual a $\frac{\hbar}{2}$ na direção x, ou seja, se seu vetor de estado é o autovetor de $\hat{S}_x$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$,

$$\hat{S}_x|x,+\rangle = \frac{\hbar}{2}|x,+\rangle,$$

o vetor de estado do sistema no instante t é dado por

$$|t\rangle = \hat{U}(t,0)|x,+\rangle,$$

onde $\hat{U}(t,0)$ é o operador de evolução temporal. Uma vez que a hamiltoniana do sistema é um operador dependente do tempo e que comuta em tempos diferentes,

$$[\hat{H}(t_1), \hat{H}(t_2)] = 0 \qquad t_1 \neq t_2,$$

o operador de evolução temporal é obtido através da expressão

$$\hat{U}(t,0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\hat{H}(t')\right).$$

Calculando explicitamente o operador de evolução temporal com $\hat{H}(t) = \frac{|e|}{mc}B_0\hat{S}_z\cos\omega t$ resulta

$$\hat{U}(t,0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{|e|B_0}{m\omega c}\hat{S}_z\sin\omega t\right).$$

Como a hamiltoniana é proporcional a $\hat{S}_z$ facilmente verificamos que $|z,+\rangle$ e $|z,-\rangle$ são auto-estados da hamiltoniana e levando em conta que a expansão do estado inicial $|x,+\rangle$ nessa base é igual a

$$|x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z,+\rangle + |z,-\rangle)$$

segue que

$$\boxed{|t\rangle = \hat{U}(t,0)|x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i|e|B_0}{2m\omega c}\sin\omega t}|z,+\rangle + e^{\frac{i|e|B_0}{2m\omega c}\sin\omega t}|z,-\rangle\right)} \tag{27a}$$

ou

$$\boxed{|t\rangle = \cos\left(\frac{|e|B_0}{2m\omega c}\sin\omega t\right)|x,+\rangle - i\sin\left(\frac{|e|B_0}{2m\omega c}\sin\omega t\right)|x,-\rangle.} \tag{27b}$$

(b) A probabilidade de numa medida de $\hat{S}_x$ no instante t obtermos um valor igual a $-\frac{\hbar}{2}$ é

$$P\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}, t\right) = |\langle x,-|t\rangle|^2.$$

Portanto

$$\boxed{P\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}, t\right) = \sin^2\left(\frac{|e|B_0}{2m\omega c}\sin\omega t\right).} \tag{28}$$

(c) Para que ocorra uma inversão completa deve existir algum instante na qual a probabilidade de medir $S_x = -\frac{\hbar}{2}$ seja igual a 1. Se analisarmos a expressão

$$P\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}, t\right) = \sin^2\left(\frac{|e|B_0}{2m\omega c}\sin\omega t\right)$$

facilmente verificamos que o argumento da função seno ao quadrado é uma função oscilatória de amplitude igual a $\frac{|e|B_0}{2m\omega c}$. Note que para $\frac{|e|B_0}{2m\omega c} < \frac{\pi}{2}$ uma inversão completa não pode ocorrer. Por outro lado, para $\frac{|e|B_0}{2m\omega c} \geq \frac{\pi}{2}$ pode. Assim, o valor **mínimo** de B_0 para que ocorra uma inversão completa é obtido através da igualdade $\frac{|e|B_0}{2m\omega c} = \frac{\pi}{2}$ da qual segue:

$$\boxed{B_0 = \frac{m\omega c\pi}{|e|}.} \tag{29}$$

Note que nessas condições a inversão ocorre nos instantes $t_n = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega}$ com $n = 0, 1, 2, \ldots$

6. Considere um sistema cuja hamiltoniana é a de um oscilador harmônico unidimensional,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

e um vetor de estado

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{z\hat{a}^\dagger}|0\rangle,$$

onde z é um número complexo, $\hat{a}^\dagger$ é o operador de criação de quanta e $|0\rangle$ é o estado fundamental do sistema. Esse estado recebe o nome de *estado coerente.*

(a) Levando em conta que a exponencial de um operador $\hat{A}$ é formalmente definida em termos da sua série de potências,

$$\exp\hat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!},$$

podemos escrever o vetor de estado $|z\rangle$ na forma

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\hat{a}^{\dagger n}|0\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

onde utilizamos o fato de que $|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$. Assim mostramos que o estado coerente é uma combinação linear de todos os autovetores de $\hat{H}$,

$$\boxed{|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.} \tag{30}$$

Para mostrar que $|z\rangle$ é um auto-estado do operador de aniquilação de quanta, $\hat{a}$, calculamos explicitamente $\hat{a}|z\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{a}|z\rangle &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle \\ &= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle = z|z\rangle, \end{aligned}$$

onde utilizamos a propriedade $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ que define o operador de aniquilação de quanta de oscilador. Concluímos que

$$\boxed{\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle,} \tag{31}$$

ou seja, $|z\rangle$ é autovetor do operador $\hat{a}$ com autovalor igual a z.

(b) Para mostrar que dois estados coerentes, $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$, com $z_1 \neq z_2$, **não** são ortogonais, devemos calcular explicitamente o produto escalar $\langle z_1|z_2\rangle$. De fato:

$$\langle z_1|z_2\rangle = e^{-\frac{|z_1|^2}{2}-\frac{|z_2|^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z_1^{\star m} z_2^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = e^{-\frac{|z_1|^2}{2}-\frac{|z_2|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1^\star z_2)^n}{n!} = e^{-\frac{|z_1|^2}{2}-\frac{|z_2|^2}{2}} e^{z_1^\star z_2},$$

onde utilizamos a relação de ortogonalidade $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$. Assim, o resultado

$$\boxed{\langle z_1|z_2\rangle = \exp\left(z_1^\star z_2 - \frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2}\right)} \tag{32}$$

mostra que esses dois estados não são ortogonais. Por outro lado, se tomarmos $z_1 = z_2 = z$ facilmente verificamos que o estado coerente $|z\rangle$ é normalizado.

(c) Para verificar a resolução da unidade em termos dos estados coerentes,

$$\hat{1} = \int |z\rangle \frac{d^2 z}{\pi} \langle z|,$$

devemos escrever primeiramente os estados coerentes do integrando em termos dos autovetores $|n\rangle$ da hamiltoniana e em seguida realizar a integração utilizando coordenadas polares no plano complexo parametrizando o número complexo z na forma $z = re^{i\phi}$ e tomando $d^2 z = r\ dr\ d\phi$. Assim:

$$\begin{aligned}
\int |z\rangle \frac{d^2 z}{\pi} \langle z| &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{\pi} \int d^2 z\ e^{-|z|^2} z^{\star m} z^n \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{\pi} \overbrace{\int_0^{2\pi} d\phi\ e^{-i(m-n)\phi}}^{2\pi\delta_{nm}} \int_0^{\infty} dr\ r^{n+m+1} e^{-r^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n|}{n!} \overbrace{\int_0^{\infty} dy\ y^n e^{-y}}^{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1}
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Essa resolução da unidade é chamada de *relação de supercompleteza*.

(d) Em termos dos operadores de criação e aniquilação de quanta de oscilador os operadores de posição, $\hat{x}$, e momento, $\hat{p}$, podem ser escritos como

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

e

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Com auxílio da relação $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$ facilmente calculamos as médias

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle z|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|z\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(z^\star + z)$$

e

$$\langle\hat{p}\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle z|\hat{a}^\dagger - \hat{a}|z\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(z^\star - z).$$

Quadrando os operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ obtemos $\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ e $\hat{p}^2 = -\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ de modo que

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle z|\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|z\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(z^{\star 2} + z^2 + 1 + 2|z|^2)$$

e

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle z|\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger|z\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}(z^{\star 2} + z^2 - 1 - 2|z|^2).$$

Seguem as dispersões:

$$\boxed{\sigma_x^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}} \tag{33a}$$

e

$$\boxed{\sigma_p^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}} \tag{33b}$$

cujo produto fornece

$$\boxed{\sigma_x^2\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4}} \tag{34}$$

em acordo com o princípio da incerteza. O estado coerente é um estado de incerteza mínima.

(e) Se no instante $t = 0$ o sistema está no estado coerente $|z_0\rangle$, o vetor de estado no instante t é obtido por

$$|z_0, t\rangle = \hat{U}(t,0)|z_0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|z_0\rangle = e^{-\frac{|z_0|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_0^n}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|n\rangle.$$

Como $|n\rangle$ é um auto-estado da hamiltoniana com n quanta de oscilador com autovalor $\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ segue

$$|z_0, t\rangle = e^{-\frac{|z_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t} |n\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} e^{-\frac{|z_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

ou

$$\boxed{|z_0, t\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} |z_0 e^{-i\omega t}\rangle \equiv e^{-\frac{i\omega t}{2}} |z(t)\rangle, \qquad z(t) = z_0 e^{-i\omega t},} \tag{35}$$

mostrando que o estado evoluído é também um estado coerente só que dependente do tempo. Note que podemos verificar imediatamente que $|z_0 e^{-i\omega t}\rangle$ é um auto-estado do operador $\hat{a}(t) = e^{-i\omega t}\hat{a}$.

(f) Queremos determinar as dispersões das medidas de posição e momento no instante $t > 0$. Com auxílio dos resultados obtidos no item (d) segue

$$\langle \hat{x}(t) \rangle = \langle z_0, t | \hat{x} | z_0, t \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (z(t)^\star + z(t)),$$

$$\langle \hat{x}^2(t) \rangle = \langle z_0, t | \hat{x}^2 | z_0, t \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (z(t)^{\star 2} + z(t)^2 + 1 + 2|z(t)|^2),$$

$$\langle \hat{p}(t) \rangle = \langle z_0, t | \hat{p} | z_0, t \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (z(t)^\star - z(t))$$

e

$$\langle \hat{p}^2(t) \rangle = \langle z_0, t | \hat{p}^2 | z_0, t \rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} (z(t)^{\star 2} + z(t)^2 - 1 - 2|z(t)|^2)$$

que nos conduz ao resultado

$$\boxed{\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t) = \frac{\hbar^2}{4}, \quad \forall t > 0} \tag{36}$$

em acordo com o princípio da incerteza. Uma vez que o estado evoluído continua sendo um estado coerente tal resultado era esperado, ou seja, o produto das dispersões deve assumir o valor mínimo para todo $t > 0$.