PGF5001 - MECÂNICA QUÂNTICA I (2010)
Lista de Problemas 2
Entrega:

1. Considere um espaço de vetores de estado bi-dimensional e uma base neste espaço, $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, formada pelos autovetores do observável $\hat{A}$:

$$\hat{A}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle$$
$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle.$$

A representação da hamiltoniana, $\hat{H}$, nesta base é:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os auto-estados e autovalores de $\hat{H}$.

(b) Se o sistema está no estado $|a_1\rangle$ no instante $t = 0$, qual é o vetor de estado do sistema no instante t?

(c) Qual é a probabilidade de achar o sistema no estado $|a_2\rangle$ no instante t?

(d) Calcule a dispersão das medidas de $\hat{A}$ e $\hat{H}$ no instante t. O princípio da incerteza *energia* $\times$ *tempo* é satisfeito?

2. O estado de uma partícula livre no instante $t = 0$ é um *pacote gaussiano* dado por:

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{(\pi a_0^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{2a_0^2}}.$$

Usando a *descrição de Heisenberg*:

(a) Calcule $\sigma_x^2(t)$. Faça um gráfico qualitativo de $\sigma_x(t)$. Comente.

(b) Calcule $\sigma_p^2(t)$.

(c) O produto $\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t)$ satisfaz o princípio de incerteza? Existe um instante em que ele assume o menor valor possível?

Observação: O pacote gaussiano é a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico de comprimento do oscilador igual à a_0.

3. A hamiltoniana de uma partícula de spin 1/2 num campo magnético uniforme na direção Oz é dada por

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z.$$

   (a) Resolva as equações de movimento de Heisenberg para os operadores $\hat{S}_x(t)$, $\hat{S}_y(t)$ e $\hat{S}_z(t)$.

   (b) Se no instante $t = 0$ a partícula está no estado

$$|\alpha\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle + \frac{1}{2}|-\rangle,$$

   determine o valor médio das medidas de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ no instante t usando a descrição de Heisenberg. Qual é a velocidade angular de precessão de $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$ e qual o ângulo que ele forma com a direção do campo magnético?

4. Uma partícula de spin 1/2 interage com um campo magnético na direção Oz de modo que a hamiltoniana é igual a,

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_z.$$

   (a) Se no instante $t = 0$ o estado da partícula é um auto-estado de $\hat{S}_x$ com autovalor $\frac{\hbar}{2}$, qual é o estado da partícula no instante t?

   (b) Qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{S}_x$ no instante t, obtermos o valor $\frac{\hbar}{2}$? Faça um gráfico da probabilidade em função do tempo. Comente.

   (c) Qual é o valor médio das medidas de $\hat{S}_x$ no instante t?

   (d) Suponha que no instante $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ fazemos uma medida de $\hat{S}_x$ e achamos o valor $\frac{\hbar}{2}$. Qual é o vetor de estado do sistema no instante $t > t_1$?

   (e) Qual é a probabilidade de em medidas sucessivas de $\hat{S}_x$ nos instantes $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ e $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, acharmos valores iguais a $\frac{\hbar}{2}$?

   (f) Se não fizessemos a medida no instante t_1, qual seria a probabilidade de acharmos um valor igual a $\frac{\hbar}{2}$ numa medida de $\hat{S}_x$ no instante t_2?

5. A hamiltoniana de um elétron na presença de um campo magnético é dada por

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ é o momento magnético do elétron,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{|e|}{mc}\hat{\mathbf{S}}.$$

Se $\mathbf{B}$ é um campo magnético oscilante na direção z,

$$\mathbf{B} = B_0 \cos \omega t \; \mathbf{e}_z,$$

calcule:

(a) O vetor de estado no instante t, se no instante $t = 0$ o elétron tem projeção igual a $\frac{\hbar}{2}$ na direção x.

(b) Qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{S}_x$ obtermos um valor igual a $-\frac{\hbar}{2}$?

(c) Qual é o valor mínimo de B_0 para que ocorra uma inversão completa de $\hat{S}_x$?

6. Considere um sistema cuja hamiltoniana é a de um oscilador harmônico unidimensional,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

e um vetor de estado

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{z\hat{a}^\dagger}|0\rangle,$$

onde z é um número complexo, $\hat{a}^\dagger$ é o operador de criação de quanta e $|0\rangle$ é o estado fundamental do sistema. Esse estado recebe o nome de *estado coerente*.

(a) Mostre que $|z\rangle$ pode ser expresso como uma combinação linear da forma

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

onde $|n\rangle$ é o autovetor de $\hat{H}$ com n quanta. Além disso, verifique que $|z\rangle$ é um auto-estado do operador de aniquilação de quanta, $\hat{a}$.

(b) Mostre que dois estados coerentes, $|z_1\rangle$ e $|z_2\rangle$, com $z_1 \neq z_2$, **não** são ortogonais, calculando explicitamente o produto escalar $\langle z_1|z_2\rangle$.

(c) Verifique a resolução da unidade em termos dos estados coerentes,

$$\hat{1} = \int |z\rangle \frac{d^2 z}{\pi} \langle z|,$$

na qual a integração é estendida a todo o plano complexo.

Sugestão: Escreva os estados coerentes do integrando em termos dos autovetores $|n\rangle$ da hamiltoniana e faça a integração usando coordenadas polares no plano complexo. Verifique que a integral se reduz à soma $\sum_n |n\rangle\langle n|$. A resolução da unidade acima é chamada de *relação de supercompleteza*.

(d) Calcule as dispersões das medidas de posição e momento para o estado $|z\rangle$. O princípio da incerteza é satisfeito?

(e) Considere que no instante $t = 0$ o sistema esteja no estado coerente $|z_0\rangle$. Determine o estado do sistema num instante $t > 0$. Mostre que o estado evoluído é também um estado coerente, dependente do tempo.

(f) Determine as dispersões das medidas de posição e momento no instante $t > 0$. Faça um gráfico de $\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t)$ como função do tempo e discuta a validade do princípio da incerteza.