PGF5001 - MECÂNICA QUÂNTICA I (2010)
Lista de Problemas 1
Entrega: 22/03

1. (a) Determine os autoestados e os autovalores do operador $\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}$ para uma partícula de spin 1/2, onde a direção $\mathbf{n}$ é especificada pelos ângulos θ e ϕ,

$$\mathbf{n} = \sin\theta \cos\phi \, \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\phi \, \mathbf{e}_y + \cos\theta \, \mathbf{e}_z.$$

   (b) Se a partícula está no estado $|\mathbf{n}, -\rangle$, qual é a probabilidade de numa medida de S_z, acharmos o valor $\frac{\hbar}{2}$?

   (c) Qual é o valor médio das medidas de S_x se a partícula está no estado $|\mathbf{n}, -\rangle$?

2. Um feixe de átomos de spin 1/2 atravessa um filtro de Stern-Gerlach que mede a componente do spin numa direção $\mathbf{n}$. Considere que os átomos do feixe incidente estão no estado com $S_z = \frac{\hbar}{2}$ e que $\mathbf{n}$ está no plano xz, inclinado de um ângulo θ em relação ao eixo Oz.

   (a) Se o filtro aceita o estado com $S_{\mathbf{n}} = -\frac{\hbar}{2}$ e rejeita o estado com $S_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2}$, qual é a fração dos átomos do feixe emergente que têm $S_z = \frac{\hbar}{2}$ e $S_z = -\frac{\hbar}{2}$, respectivamente?

   (b) Calcule a fração dos átomos do feixe emergente com $S_z = \frac{\hbar}{2}$ e $S_z = -\frac{\hbar}{2}$, quando o filtro está operando sem rejeitar nenhum estado.

3. Considere uma molécula triatômica linear formada por três átomos equidistantes, E, C e D com um elétron livre. Uma base ortonormal no espaço dos vetores de estado do elétron é dada pelos estados $|\psi_E\rangle$, $|\psi_C\rangle$ e $|\psi_D\rangle$, onde o elétron está localizado na vizinhança dos átomos E, C e D, respectivamente.

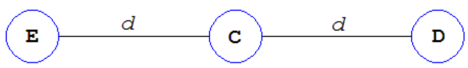

Figura 1: Disposição de uma molécula triatômica linear.

A hamiltoniana do sistema é

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W},$$

onde $|\psi_E\rangle$, $|\psi_C\rangle$ e $|\psi_D\rangle$ são autovetores degenerados de $\hat{H}_0$ com energia E_0 e $\hat{W}$ é um operador que transfere o elétron de um átomo para o outro definido por

$$\hat{W}|\psi_E\rangle = -a|\psi_C\rangle, \quad \hat{W}|\psi_C\rangle = -a|\psi_E\rangle - a|\psi_D\rangle, \quad \hat{W}|\psi_D\rangle = -a|\psi_C\rangle,$$

com a sendo uma constante real positiva.

(a) Calcule os autovalores e autovetores de $\hat{H}$. Qual é a interpretação física dos autovalores?

(b) Suponha que o sistema se encontre no estado fundamental. Quais as probabilidades de encontrar o elétron nos estados $|\psi_E\rangle$, $|\psi_C\rangle$ e $|\psi_D\rangle$?

(c) Considere um elétron no estado $|\psi_E\rangle$. Se medimos sua energia que valores podemos encontrar? Quais as probabilidades de acharmos cada um desses valores?

(d) Calcule o valor médio e a dispersão das medidas da energia se o elétron está no estado $|\psi_E\rangle$.

(e) Se numa medida da energia encontramos o elétron no primeiro estado excitado, quais as probabilidades de encontrar o elétron nos estados $|\psi_E\rangle$, $|\psi_C\rangle$ e $|\psi_D\rangle$?

4. Considere uma partícula de spin 1/2 e uma base de vetores de estado, $|+\rangle$ e $|-\rangle$, autovetores de $\hat{S}_z$ com autovalores $\frac{\hbar}{2}$ e $-\frac{\hbar}{2}$, respectivamente. A representação de $\hat{S}_y$ nesta base é dada pela matriz,

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) O operador $\hat{S}_y$ é um observável? Justifique.

(b) Ache os autovalores e autovetores de S_y. Note que os autovalores são reais e os autovetores ortogonais.

(c) Ache a transformação unitária que diagonaliza S_y.

(d) Ache a representação de $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ e $\hat{S}_z$ na base de autovetores de $\hat{S}_y$.

5. Considere um espaço de vetores de estado tridimensional. Na base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, os observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são representados pelas matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ib \\ 0 & ib & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) O espectro de $\hat{A}$ tem degenerescência? O espectro de $\hat{B}$ também é degenerado?
   (b) Mostre que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são operadores compatíveis.
   (c) Ache uma base de autovetores simultâneos de $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Eles são um conjunto completo de observáveis que comutam? Justifique.
   (d) Se o sistema está no estado $|3\rangle$, qual a probabilidade de numa medida simultânea de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, acharmos os valores $-a$ e b, respectivamente?

6. Dado o operador

$$\hat{B}(l) = \exp \frac{il\hat{x}}{\hbar}$$

e o estado

$$|\beta\rangle = \hat{B}(l)|\alpha\rangle.$$

   (a) Calcule $\phi_\beta(p)$ dado $\phi_\alpha(p)$.
   (b) Mostre que

$$\langle\beta|\hat{p}|\beta\rangle = \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle + l.$$

   (c) Qual é a interpretação física de $\hat{B}$?