FMA403- MECÂNICA QUÂNTICA I
Primeiro Semestre de 2009
Lista de Problemas 4

1. Considere um sistema cuja hamiltoniana é a de um oscilador harmônico unidimensional,
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$
e um vetor de estado
$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$
onde α é um número complexo e $|n\rangle$ é o autovetor de $\hat{H}$ com n quanta
$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$
a) Mostre que $|\alpha\rangle$ tem norma 1.
b) Mostre que $|\alpha\rangle$ é um autovetor do operador de aniquilação de quanta $\hat{a}$.
c) Calcule a dispersão das medidas de $\hat{x}$ e $\hat{p}$, se o sistema está no estado $|\alpha\rangle$. O princípio da incerteza é satisfeito?

2. Use a álgebra dos operadores de criação e aniquilação de quanta de oscilador para responder as questões abaixo.
a) Calcule os valores médios dos operadores $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ e $\hat{p}^2$, para o autovetor da Hamiltoniana de um oscilador harmônico com n quanta.
b) O princípio da incerteza é satisfeito? Para que valor de n o produto das dispersões das medidas da posição e do momento assume o menor valor? Esse estado é um estado de incerteza mínima?

3. Considere um sistema cuja hamiltoniana é a de um *oscilador harmônico isotrópico*,
$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{\mathbf{r}}^2.$$
Os estados estacionários do sistema são auto-estados simultâneos de $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{L}}^2$ e $\hat{L}_z$ com autovalores respectivamente iguais a $\hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$, $\hbar^2 l(l+1), \hbar m$ e as correspondentes autofunções são da forma,
$$\Psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi).$$
Suponha que o sistema está no estado
$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4}(2\Psi_{110}(\mathbf{r}) + 3\Psi_{311}(\mathbf{r}) - \sqrt{3}\Psi_{31-1}(\mathbf{r})).$$
a) Calcule o valor médio das medidas da energia.
b) Calcule o valor médio das medidas de $\hat{\mathbf{L}}^2$.
c) Calcule o valor médio das medidas de $\hat{L}_z$.
d) $\Psi(\mathbf{r})$ é uma autofunção dos observáveis $\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}^2$ e $\hat{L}_z$?
d) Qual é a probabilidade de numa medida da energia acharmos o valor $\frac{9}{2}\hbar\omega$?
Observação: Para um dado n, os possíveis valores de l são:
$$l = n, n-2, ..., 1 \text{ ou } 0.$$
Para um dado l, os possíveis valores de m são:
$$m = -l, -l+1, ..., l-1, l.$$

4. Considere uma partícula de massa m num *poço esférico infinito*
$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r > a. \end{cases}$$
Se nos restringirmos ao caso $l = 0$, calcule:
a) Os níveis de energia para $l = 0$.
b) A função de onda do estado de mais baixa energia e a do primeiro estado excitado, para $l = 0$.

c) A densidade de probabilidade de cada um dos estados do item b). Faça um gráfico das densidades. Analise o comportamento das densidades como função de r.
d) Se a partícula está no estado de mais baixa energia, qual é a distância mais provável de encontrá-la numa medida da posição?

5. No átomo de hidrogênio o elétron está no campo coulombiano de um próton. Os estados estacionários do átomo $\Psi_{nlm}(\mathbf{r})$ são auto-estados simultâneos de $\hat{H}$, $\hat{\mathbf{L}}^2$ e $\hat{L}_z$, cujas autofunções são da forma,
$$\Psi_{nlm}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi).$$
Seja $\rho_s(r)$, dada por
$$\rho_s(r) = r^2\int \rho(r,\theta,\phi)d\Omega,$$
a densidade de probabilidade do elétron se encontrar numa casca esférica entre r e $r+dr$.
a) Para um dado l, qual é o estado de mais baixa energia?
b) Para o estado determinado em a), calcule $\rho_s(r)$. Determine os pontos onde $\rho_s(r)$ é máxima e onde ela se anula.
c) No caso clássico e para um dado momento angular L, qual é a órbita do elétron se sua energia é a energia mínima? Existe uma correspondência entre esse estado e o estado quântico determinado em a)? Interprete.
Dica: Lembre-se que na Mecânica Clássica as trajetórias de uma partícula submetida a um potencial central são obtidas a partir do seu potencial efetivo, $V_{eff}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$.

6. Suponha que o elétron no átomo de hidrogênio esteja no estado $\Psi_{200}(\mathbf{r})$.
a) Calcule a densidade de probabilidade do elétron e mostre que ela dependende apenas da coordenada radial r. Ache o(s) ponto(s) onde ela é máxima em função do raio de Bohr.
b) Calcule o raio quadrático médio do elétron, $\langle\Psi_{200}(\mathbf{r})|r^2|\Psi_{200}(\mathbf{r})\rangle$, em função do raio de Bohr.

7. As transições entre os estados estacionários do átomo de hidrogênio com emissão de radiação (fótons) satisfazem as *regras de seleção* (transição dipolar),
$$\Delta l = l_f - l_i = \pm 1$$
onde l_f e l_i são, respectivamente, o momento angular do estado final e do estado inicial. Como vamos admitir que as transições conservam o número quântico m, tome $m = 0$.
a) Ache as transições permitidas do estado $5d$ ($l = 2$) para os estados de energia mais baixa.
b) Determine o maior e o menor comprimento de onda das transições permitidas, em função do raio de Bohr e da constante de estrutura fina, α.
Dado:
$$E_i = E_f + E_{\text{fóton}}$$
$$E_{\text{fóton}} = \frac{hc}{\lambda}$$

8. O elétron no átomo de hidrogênio está, no instante $t = 0$, no estado
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\Psi_{211}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\Psi_{311}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{321}(\mathbf{r})$$
onde $\Psi_{nlm}(\mathbf{r})$ são as autofunções do elétron.
a) Qual é o vetor de estado no instante t, $\Phi(\mathbf{r},t)$?

b) $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é uma autofunção de $\mathbf{L}^2$?
c) Se fizermos uma medida do módulo ao quadrado do momento angular orbital, $\mathbf{L}^2$, que valores podemos achar? Qual é a probabilidade de encontrar cada um deles? Qual é o valor médio das medidas de $\mathbf{L}^2$ no instante t?
d) $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é uma autofunção de L_z?
e) Qual é o valor médio das medidas de L_z no instante t?
f) Qual é a probabilidade de numa medida da energia acharmos um valor igual a $\frac{E_1}{4}$? Qual é o vetor de estado no instante logo após a medida?