Mecânica Quântica 1
Resolução dos exercícios 1 e 7 da Lista 4

1: Vamos considerar um sistema cuja hamiltoniana é a de um oscilador harmônico unidimensional. Seja o estado $|\alpha\rangle$ dado por

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

a) Vamos mostrar que o estado acima tem norma 1. Para isto devemos calcular explicitamente o produto escalar $\langle\alpha|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} = 1 \end{aligned}$$

onde usamos a relação $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$. Logo:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1.$$

b) Para demonstrar que $|\alpha\rangle$ é um autovetor do operador de aniquilação de quanta de oscilador devemos calcular explicitamente a ação do operador $\hat{a}$ sobre $|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{a}|\alpha\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a}|n\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= \alpha e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Logo:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

c) Calcularemos a dispersão das medidas de $\hat{x}$ e $\hat{p}$ utilizando o resultado acima. Em termos dos operadores de criação e aniquilação de quanta de oscilador, temos:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}),$$

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1),$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}),$$

$$\hat{p}^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - 2\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1),$$

Explorando $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ e $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, podemos calcular:

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle\alpha|\hat{a}^\dagger + \hat{a}|\alpha\rangle)$$

onde $\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha$ e $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle^* = \alpha^*$ de modo que

$$\langle\hat{x}\rangle = \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha^* + \alpha).$$

Analogamente temos que

$$\langle\hat{x^2}\rangle = \langle\alpha|\hat{x^2}|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha^{*2} + \alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1),$$

$$\langle\hat{p}\rangle = \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\alpha^* - \alpha),$$

$$\langle\hat{p^2}\rangle = \langle\alpha|\hat{p^2}|\alpha\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}(\alpha^{*2} + \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - 1).$$

Logo:

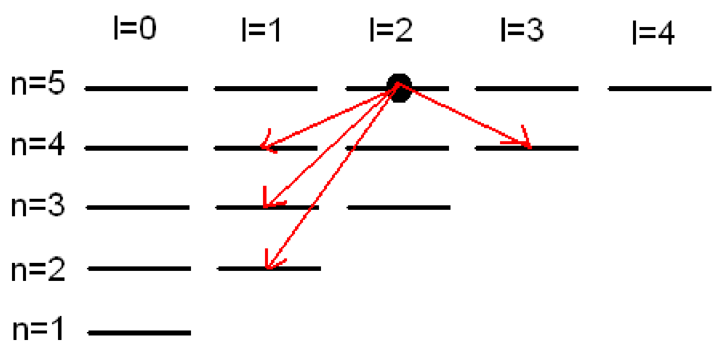
$$\sigma_x^2 = \langle\hat{x^2}\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

$$\sigma_p^2 = \langle\hat{p^2}\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}$$

de modo que

$$\sigma_x^2\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Assim verificamos que o estado $|\alpha\rangle$ é um estado de incerteza *mínima*. Na literatura esse estado recebe o nome de **estado coerente**.



7: As transições entre os estados estacionários do átomo de H com emissão de radiação satisfazem as regras de seleção:

$$\Delta l = \pm 1$$

com a conservação do número quântico m.
a) Vamos determinar as transições permitidas do estado $5d$, $n = 5$ e $l = 2$, para os estados de mais baixa energia, $n < 5$. Para cada n temos $l = 0, \ldots, n-1$. As transições permitidas, $5d \to 4p$, $5d \to 4f$, $5d \to 3p$ e $5d \to 2p$, se encontram esquematizadas na figura.

b) O ponto de partida para determinar o comprimento de onda nessas transições é a conservação da energia

$$E_i = h\nu + E_f.$$

Como $\lambda v = c$, temos que

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\hbar c}(E_i - E_f).$$

Como $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\alpha^2\frac{mc^2}{2n^2}$, com $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ sendo a constante de estrutura fina, resulta:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha}{4\pi a_B}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = R_y\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

onde $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$ é o raio de Bohr e $R_y = \frac{\alpha}{4\pi a_B}$ a constante de Rydberg. Levando em conta que $n_i = 5$ verificamos que:
(i) O **maior** comprimento de onda ocorre para a transição para o estado $n_f = 4$ com $l = 1$ e $l = 3$ com $\frac{1}{\lambda} = \frac{9}{400}R_y$.

(ii) O **menor** comprimento de onda ocorre para a transição para o estado $n_f = 2$ com $l = 1$ com $\frac{1}{\lambda} = \frac{84}{400} R_y$.