FMA0403- MECÂNICA QUÂNTICA I
Primeiro semestre de 2009
Lista de Problemas 3

1. O espaço de vetores de estado de uma partícula é bidimensional e os vetores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ formam uma base ortonormal neste espaço. A representação do operador linear $\hat{A}$ nesta base é dada pela matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) O operador $\hat{A}$ é um observável? Justifique.
b) Ache os autovalores de $\hat{A}$. Note que eles são reais.
c) Ache os autovetores de $\hat{A}$. Note que eles são ortogonais.
d) Ache a transformação unitária que diagonaliza $\hat{A}$.
e) Quais valores podemos achar numa medida do observável $\hat{A}$?
f) Se a partícula está no estado

$$|\theta\rangle = \cos\theta |e_1\rangle + \mathrm{sen}\theta |e_2\rangle,$$

qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{A}$ acharmos o valor 1?
g) Qual é o valor médio das medidas de $\hat{A}$ se a partícula está no estado do item f)?
h) Se numa medida do observável $\hat{A}$ acharmos o valor 1, qual é o estado do sistema logo após a medida? Se imediatamente após a primeira medida fizermos outra medida de $\hat{A}$, qual é a probabilidade de acharmos o valor 1?

2. a) Mostre que o hermiteano conjugado do produto de dois operadores é o produto dos respectivos hermiteanos conjugados na ordem inversa,

$$(\hat{X}\hat{Y})^\dagger = \hat{Y}^\dagger \hat{X}^\dagger.$$

b) Mostre que se $\hat{A}$ é um operador hermiteano vale a relação

$$\langle\delta|\gamma\rangle = \langle\alpha|\hat{A}^2|\beta\rangle.$$

onde

$$|\delta\rangle = \hat{A}|\alpha\rangle$$
$$|\gamma\rangle = \hat{A}|\beta\rangle$$

c) Seja $\hat{U}$ um operador unitário. Mostre que:
i)

$$\langle\alpha'|\beta'\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle$$

onde

$$|\alpha'\rangle = \hat{U}|\alpha\rangle$$
$$|\beta'\rangle = \hat{U}|\beta\rangle$$

ii) Os autovalores de $\hat{U}$ tem módulo igual a 1.
iii) Os autovetores de $\hat{U}$ cujos autovalores são distintos são ortogonais.

3. Considere um sistem de dois níveis de energia e uma base cujos vetores são estados estacionários da hamiltoniana $\hat{H}$, com autovalores ϵ_1 e ϵ_2:

$$\hat{H}|\epsilon_1\rangle = \epsilon_1|\epsilon_1\rangle,$$

$$\hat{H}|\epsilon_2\rangle = \epsilon_2|\epsilon_2\rangle.$$

Seja $\hat{A}$ um observável cujos autovalores são iguais a a_1 e a_2 e os correspondentes autovetores são,

$$\begin{aligned} |a_1\rangle &= \cos\theta|\epsilon_1\rangle + \mathrm{sen}\theta|\epsilon_2\rangle, \\ |a_2\rangle &= -\mathrm{sen}\theta|\epsilon_1\rangle + \cos\theta|\epsilon_2\rangle. \end{aligned}$$

Suponha que o sistema esteja no estado

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|a_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|a_2\rangle.$$

a) Qual a probabilidade de numa medida da energia acharmos o valor ϵ_1? E o valor ϵ_2 ?
b) Calcule o valor médio e a dispersão das medidas de $\hat{H}$ e $\hat{A}$. O princípio da incerteza é satisfeito ?
c) Se numa medida da energia achamos o valor ϵ_2 qual é a probabilidade de numa medida posterior de $\hat{A}$, acharmos o valor a_2?

4. Considere um sistema de dois níveis de energia e uma base cujos vetores são estados estacionários da hamiltoniana com autovalores ϵ_1 e ϵ_2:

$$\hat{H}|1\rangle = \epsilon_1|1\rangle, \hat{H}|2\rangle = \epsilon_2|2\rangle$$

Seja $\hat{A}$ um observável cujos autovalores são iguais a a_1 e a_2 e os correspondentes autovetores são,

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

$$|a_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

a) Se no instante $t = 0$ o sistema está no estado $|a_1\rangle$, determine o vetor de estado no instante t.
b) Calcule o valor médio das medidas de $\hat{H}$ e $\hat{A}$ no instante t.
c) Determine a probabilidade de numa medida de $\hat{A}$ no instante t acharmos o valor a_2.
d) Calcule a dispersão das medidas de $\hat{H}$ e $\hat{A}$ no instante t. O princípio da incerteza *energia* $\times$ *tempo* é satisfeito?
e) Se fizermos uma medida de $\hat{A}$ no instante t_0 e acharmos o valor a_2, qual é o vetor de estado do sistema num instante $t > t_0$?

5. A representação dos observaveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ na base de vetores de estado $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) Mostre que os observáveis $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são compatíveis.
b) Se o sistema está no estado

$$|\theta\rangle = -\text{sen}\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle$$

determine a dispersão das medidas de $\hat{A}$ e $\hat{B}$. O princípio da incerteza é satisfeito?
c) Se o sistema está no estado $|\theta\rangle$, qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{A}$ acharmos o valor 1? Se fizermos uma medida de $\hat{B}$ e acharmos o valor -1, qual é a probabilidade de numa medida de $\hat{A}$, imediatamente após a medida de $\hat{B}$, acharmos o valor 1 ? Comente a sua resposta.