Vamos começar a demonstração do princípio da incerteza definindo dois vetores:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \Delta\hat{A}|\psi\rangle \\ |\beta\rangle &= \Delta\hat{B}|\psi\rangle \end{aligned}$$

onde $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ e $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$são operadores hermiteanos, veja Lema 2. Pelo exercício 5 sabemos que a norma ao quadrado desses vetores é igual à dispersão

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2|\psi\rangle = \sigma_A^2$$

e

$$\langle\beta|\beta\rangle = \langle\psi|(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)^2|\psi\rangle = \sigma_B^2.$$

No mesmo exercício 5 mostramos que

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}|\psi\rangle.$$

O produto $\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}$ pode ser escrito da seguinte forma

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = \frac{1}{2}\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\} + \frac{1}{2}[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]$$

onde

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} - \Delta\hat{B}\Delta\hat{A}$$

é o comutador de $\Delta\hat{A}$ e $\Delta\hat{B}$ e

$$\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\} = \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} + \Delta\hat{B}\Delta\hat{A}$$

é o anti-comutador de $\Delta\hat{A}$ e $\Delta\hat{B}$.

Agora, vamos enunciar duas propriedades que usaremos na demonstração.
i) O comutador de dois operadores hermiteanos é anti-hermiteano.
Sejam $\hat{C}$ e $\hat{D}$ dois operadores hermiteanos.

$$[\hat{C}, \hat{D}]^\dagger = \hat{D}^\dagger\hat{C}^\dagger - \hat{C}^\dagger\hat{D}^\dagger = \hat{D}\hat{C} - \hat{C}\hat{D} = -[\hat{C}, \hat{D}].$$

ii) O anti-comutador de dois operadores hermiteanos é hermiteano.
Sejam $\hat{C}$ e $\hat{D}$ dois operadores hermiteanos.

$$\{\hat{C}, \hat{D}\}^\dagger = \hat{D}^\dagger\hat{C}^\dagger + \hat{C}^\dagger\hat{D}^\dagger = \hat{D}\hat{C} + \hat{C}\hat{D} = \{\hat{C}, \hat{D}\}.$$

Os passos para deduzir o princípio da incerteza estão na ordem das propriedades discutidas acima.
Da desigualdade de Schwarz temos que

$$\begin{aligned} \sigma_A^2\sigma_B^2 &\geq |\langle\psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}|\psi\rangle|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}|\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle + \langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle|^2 \\ &\geq \frac{1}{4}\left(|\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle|^2\right) \\ &\geq \frac{1}{4}|\langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle|^2. \end{aligned}$$

Como,

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]$$

deduzimos o princípio da incerteza:

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \frac{1}{4}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|^2.$$

<u>Estado de incerteza mínima.</u>

Naturalmente, o princípio da incerteza depende de $|\psi\rangle$. Desse modo, dados dois observáveis incompatíveis, podemos achar o estado de incerteza mínima, para o qual a desigualdade se torna igualdade.
A igualdade ocorre quando,

$$\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle = 0$$
$$\Delta\hat{A}|\psi\rangle = -\lambda\Delta\hat{B}|\psi\rangle.$$

A primeira das duas equações acima diz que o valor médio do anti-comutador é nulo. Vamos examinar as consequências dessa restrição. Usando a segunda das duas equações, podemos mostrar que:

$$\langle\psi|\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}|\psi\rangle = -\lambda\langle\psi|\Delta\hat{B}^2|\psi\rangle$$
$$\langle\psi|\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}|\psi\rangle = \langle\psi|\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}|\psi\rangle^* = -\lambda^*\langle\psi|\Delta\hat{B}^2|\psi\rangle.$$

O anti-comutador é nulo se

$$(\lambda^* + \lambda)\langle\psi|\Delta\hat{B}^2|\psi\rangle = (\lambda^* + \lambda)\sigma_B^2 = 0.$$

Desse modo, concluímos que λ é um número imaginário puro. Usando as relações acima podemos determinar o valor de λ :

$$\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = \langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle = (\lambda - \lambda^*)\sigma_B^2$$

Como $\lambda^* = -\lambda$, temos que λ é dada por:

$$\lambda = \frac{\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle}{2\sigma_B^2}$$

Resumindo, o estado de incerteza mínima satisfaz a equação

$$(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)|\psi\rangle = -\lambda(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)|\psi\rangle.$$

com λ calculado acima.
Princípio da incerteza de Heisenberg.
Os observáveis no princípio da incerteza de Heisenberg, são os operadores posição e momento, $\hat{x}, \hat{p}$ respectivamente. Como, $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, o princípio da incerteza de Heisenberg é dado por:

$$\sigma_x^2\sigma_p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Note que, nesse caso, o limite inferior não depende do estado.
Exercício 5:

Mostre que se $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ são operadores hermiteanos vale a identidade,

$$\langle\gamma|\delta\rangle = \langle\alpha|\hat{X}\hat{Y}|\beta\rangle$$

onde

$$|\gamma\rangle = \hat{X}|\alpha\rangle$$
$$|\delta\rangle = \hat{Y}|\beta\rangle.$$

6.4 Princípio da incerteza energia-tempo

Vamos examinar o princípio da incerteza no caso particular onde $|\psi\rangle$ é o vetor de estado do sistema no instante t e a hamiltoniana um dos observáveis,

$$\begin{array}{rcl} |\psi\rangle & \rightarrow & |\psi(t)\rangle \\ \hat{A} & \rightarrow & \hat{A} \\ \hat{B} & \rightarrow & \hat{H}. \end{array}$$

Pelo princípio da incerteza temos que:

$$\sigma_A^2\sigma_H^2 \geq \frac{1}{4}|\langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle|^2.$$

com as dispersões de $\hat{A}$ e $\hat{H}$ iguais à,

$$\sigma_A^2 = \langle\psi(t)|(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)^2|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{A}^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle^2$$

$$\sigma_H^2 = \langle\psi(t)|(\hat{H}-\langle\hat{H}\rangle)^2|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{H}^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle^2$$

Como, pelo exercício 6, vale a identidade,

$$i\hbar\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle$$

o princípio da incerteza fica igual à,

$$\sigma_A^2\sigma_H^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|^2$$

Essa expressão sugere a introdução de um tempo característico dado por,

$$\tau_A = \frac{\sigma_A}{\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|}$$

e reescrever a relação da incerteza como,

$$\sigma_H\tau_A \geq \frac{\hbar}{2}.$$

A interpretação física de τ_A é identificá-lo com o tempo necessário para que o valor médio do observável $\hat{A}$ mude de um valor igual ao seu desvio padrão. Em outras palavras, é um tempo característico para notarmos uma variação do sistema.
Qualitativamente, podemos destacar dois limites:
a) $\sigma_H \to 0$, $\tau_A \to \infty$, o sistema não muda. Estado estacionário.
b) $\sigma_H \to \infty$, $\tau_A \to 0$, vetor de estado com dispersão da energia grande, tempo de mudança pequeno.

Exercício 6:

Mostre que ,

$$i\hbar\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \langle\psi(t)|[\hat{A},\hat{H}]|\psi(t)\rangle.$$

Sugestão: Use a expansão de $|\psi(t)\rangle$ na base de estados estacionários,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\psi_n\rangle$$

com $c_n(t) = c_n(0)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$.