

## Apêndice I

# Modelo de Planck

Em 1900, Max Planck encontrou a solução para o problema da catástrofe do ultra-violeta da radiação térmica (§ H.9). Para isso, Planck propôs a hipótese de que a energia  $\epsilon$  da radiação emitida pelos átomos oscilantes era dada de forma *discretizada* (*quantizada*) em pacotes de energia, os *fótons*, que dependem da frequência  $\nu$  da onda eletromagnética:

$$\epsilon = \epsilon_n(\nu) = nh\nu \quad (\text{I.1})$$

onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  é um número inteiro, e  $h = 6 \times 10^{-34}$  J.s é a chamada constante de Planck, uma nova constante universal da natureza, que terá grande importância na Física Quântica.

Com esta hipótese, não vale mais o resultado de que a energia média de cada oscilador é  $k_B T$ , já que este resultado foi obtido no espaço de fase contínuo, assumindo que a energia podia ter qualquer valor. Precisamos então, recalcular essa energia média.

Como agora temos energia discretas, vamos retomar as expressões para valores médios da distribuição canônica, usando somatórios ao invés de integrais. Temos

$$\bar{\epsilon}(\nu) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n(\nu) e^{-\beta \epsilon_n(\nu)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n(\nu)}} = \frac{h\nu \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta h\nu}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta h\nu}} \quad (\text{I.2})$$

Usando  $x = \beta h\nu$ , temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta h\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (\text{I.3})$$

e portanto

$$\bar{\epsilon}(\nu) = -h\nu \frac{\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -h\nu \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (\text{I.4})$$

Precisamos calcular o somatório  $S$ :

$$\begin{aligned} S &= 1 + e^{-x} + (e^{-x})^2 + \dots \\ \rightarrow e^{-x} S &= e^{-x} + (e^{-x})^2 + \dots \end{aligned}$$

Subtraindo um resultado do outro:

$$\begin{aligned} S - e^{-x}S &= 1 \\ \rightarrow S &= \frac{1}{1 - e^{-x}} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Portanto

$$\bar{\epsilon}(\nu) = -h\nu \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} = -h\nu(1 - e^{-x}) \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = h\nu \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{h\nu}{e^x - 1} \quad (\text{I.6})$$

ou finalmente,

$$\bar{\epsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (\text{I.7})$$

Essa é a energia média que deve entrar na densidade de energia da radiação, ou seja:

$$u(\nu)d\nu = \bar{\epsilon}(\nu) \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (\text{I.8})$$

$$= \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \quad (\text{I.9})$$

ou

$$\boxed{u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu} \quad (\text{Radiação Térmica Quântica}) \quad (\text{I.10})$$

Definindo

$$\eta = h\nu/k_B T, \quad (\text{I.11})$$

de forma que  $\nu = (k_B T/h)\eta$  e  $h\nu^3 = \eta^3 k_B^3 T^3/h^2$  e  $d\nu = (k_B T/h)d\eta$ , temos

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^\eta - 1} = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta \quad (\text{I.12})$$

e definimos

$$u^*(\eta)d\eta = \frac{h^3 c^3}{8\pi k_B^4 T^4} u(\nu)d\nu = \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta \quad (\text{I.13})$$

Lembre que no caso clássico, tínhamos

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^3} \eta^2 d\eta \quad (\text{I.14})$$

e, portanto,

$$u^*(\eta)d\eta = \frac{h^3 c^3}{8\pi k_B^4 T^4} u(\nu)d\nu = \eta^2 d\eta \quad (\text{I.15})$$

Na Fig. I.1, mostramos a distribuição de radiação térmica *quântica* e a *clássica*. Note que a versão *quântica* elimina a catástrofe do ultra-violeta, e concorda perfeitamente com as observações. Inicialmente não se compreendeu a razão da hipótese inicial de Planck para a quantização da energia dos osciladores. O próprio Planck não gostava deste argumento, e acreditava que era apenas um artifício matemático para chegar à resposta correta. Eventualmente, com o desenvolvimento da Mecânica Quântica, ficou claro que essa quantização era fenômeno recorrente e inerente a sistemas quânticos.

O nascimento da física quântica se deu, portanto, com a quantização da luz, que até então era tida como uma onda eletromagnética. Esse fenômeno mostrou que a luz também tem características corpusculares, i.e. pode se comportar como pacotes de energia, que nada lembram ondas senoidais.

O espectro de radiação térmica aparece em vários sistemas físicos, e.g. o espectro da radiação solar. Curiosamente, o espectro de corpo negro mais perfeito que se conhece na natureza é o da radiação cósmica de fundo (RCF), que foi liberada 400.000 anos após o Big Bang, e pode ser detectada hoje em todas as direções do Universo. Esse espectro corresponde a uma radiação com  $T = 2.7\text{K}$  com pico na região de microondas, e é umas das observações mais importantes em Cosmologia. A detecção desta radiação em 1964 deu a Penzias e Wilson o prêmio Nobel de Física em 1978. Essa medida indicou que, de fato, o Universo foi muito quente no passado e, ao se esfriar, essa radiação se desacoplou da matéria. A detecção de flutuações de temperatura da ordem de uma parte em  $10^{-5}$  nesta radiação, feita em 1992 pelo satélite COBE, deu a Smoot e Mather o prêmio Nobel em 2006. Este feito iniciou a era da cosmologia de precisão.

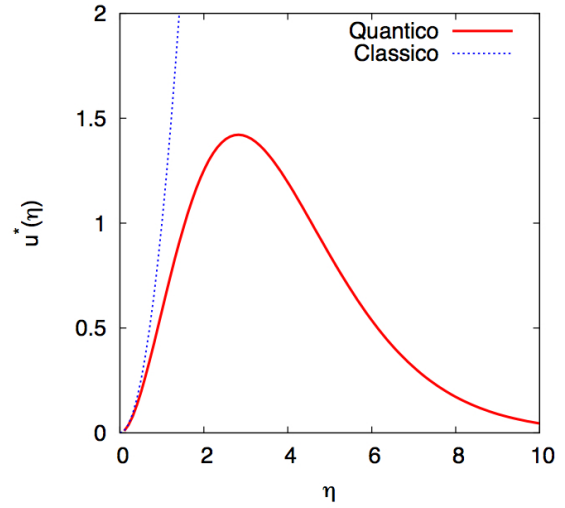


Figura I.1: Distribuição de energia normalizada  $u^*(\eta) = u(\nu)(h^3 c^3 / 8\pi k_B^4 T^4)$  da radiação de corpo negro em função da frequência normalizada  $\eta = h\nu / k_B T$ , no caso clássico e quântico.

## I.1 Lei de Deslocamento de Wien

Como  $u(\eta)$  tem um pico sempre em  $\eta_{\max} = \text{const} \approx 2.8$ , temos que

$$\eta_{\max} = \beta h \nu_{\max} = \frac{h \nu_{\max}}{k_B T} = \text{const} \rightarrow \boxed{\frac{\nu_{\max}}{T} = \text{const}} \quad (\text{I.16})$$

Portanto,

$$\frac{\nu_{\max,1}}{T_1} = \frac{\nu_{\max,2}}{T_2} \quad (\text{I.17})$$

Ou seja, a posição do pico  $\nu_{\max}$  é proporcional à temperatura  $T$ . Podemos calcular a posição do pico mais explicitamente, derivando  $u(\nu)$ :

$$\frac{du(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \left( \frac{3\nu^2}{e^{\beta h \nu} - 1} - \frac{\beta h \nu^3 e^{\beta h \nu}}{(e^{\beta h \nu} - 1)^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad 3 = \frac{\beta h \nu_{\max} e^{\beta h \nu_{\max}}}{e^{\beta h \nu_{\max}} - 1} \quad (\text{I.18})$$

Esta condição pode ser expressa como:

$$3e^{\beta h\nu_{\max}} - 3 = \beta h\nu_{\max} e^{\beta h\nu} \rightarrow 3 - 3e^{-\beta h\nu_{\max}} = \beta h\nu_{\max}$$

ou

$$\rightarrow e^{-\eta_{\max}} = 1 - \frac{\eta_{\max}}{3}, \quad \text{onde } \eta_{\max} = \beta h\nu_{\max}. \quad (\text{I.19})$$

A solução desta equação dá

$$\eta_{\max} \approx 2.82 \rightarrow \frac{\nu_{\max}}{T} = \frac{\eta_{\max} k_B}{h} = 5.88 \times 10^{10} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1} \quad (\text{I.20})$$

## I.2 Lei de Stefan-Boltzmann

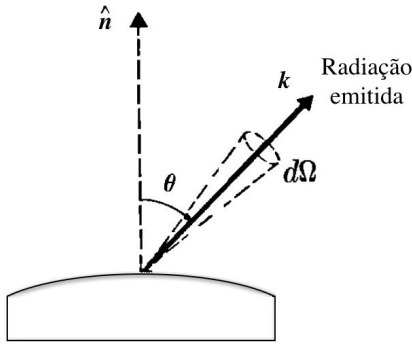


Figura I.2: Emissão de radiação pela superfície de um corpo negro ideal. A radiação é emitida com vetor de onda  $\vec{k}$  fazendo um ângulo  $\theta$  com a normal ao corpo negro, em um ângulo sólido  $d\Omega$ . (Reif)

Considere a radiação emitida por um corpo negro, com vetor de onda na direção  $\hat{k}$  fazendo ângulo  $\theta$  com a normal  $\hat{n}$  ao corpo e dentro de um ângulo sólido  $d\Omega$ .

Pelas Eqs. H.100 e H.101, o número de estados neste ângulo sólido é (agora sem integrar em  $d\Omega$ ):

$$\begin{aligned} \Omega_{\vec{k}} d^3k &= \frac{V}{\pi^3} d^3k \\ \Omega_k dk d\Omega &= \frac{V}{\pi^3} \frac{d\Omega}{8} k^2 dk = \frac{V d\Omega}{8\pi^3} k^2 dk \\ \Omega_\nu d\nu d\Omega &= \frac{V d\Omega}{8\pi^3} \left( \frac{2\pi\nu}{c} \right)^2 \frac{2\pi d\nu}{c} = \frac{V}{c^3} \nu^2 d\nu d\Omega \end{aligned}$$

e a densidade de energia da radiação nesta direção fica

$$u(\nu) d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu d\Omega \quad (\text{I.21})$$

A intensidade da radiação (energia emitida por unidade de tempo por unidade de área do corpo negro, ou fluxo de energia) na frequência  $\nu$  e ângulo sólido  $d\Omega$  fica então:

$$I(\nu) d\nu d\Omega = [\vec{S}(\nu, \hat{k}) \cdot \hat{n}] d\nu d\Omega \quad (\text{I.22})$$

$$= u(\nu) c \cos \theta d\nu d\Omega \quad (\text{I.23})$$

Integrando em todas as direções, temos

$$I(\nu) d\nu = u(\nu) c d\nu \int \cos \theta d\Omega \quad (\text{I.24})$$

e como

$$\int \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^1 u du = 2\pi \frac{1}{2} = \pi \quad (\text{I.25})$$

temos

$$\begin{aligned} I(\nu)d\nu &= \pi u(\nu)c d\nu \\ \rightarrow I(\nu)d\nu &= \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

E a intensidade total em todas as frequências fica

$$I = \int I(\nu)d\nu = \int \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu \quad (\text{I.27})$$

Mudando  $x = \beta h\nu$ , i.e.  $\nu = x/h\beta$  e  $d\nu = dx/h\beta$ , temos

$$I = \int \frac{2\pi h(x/h\beta)^3}{c^2} \frac{1}{e^x - 1} \frac{dx}{h\beta} \quad (\text{I.28})$$

$$= \frac{2\pi}{c^2 h^3 \beta^4} \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (\text{I.29})$$

Como

$$\int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (\text{I.30})$$

temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi k_B^4 T^4}{c^2 h^3} \frac{\pi^4}{15} = \left( \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \right) T^4 \\ \boxed{I = \sigma T^4} \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

onde

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Kg s}^{-3} \text{K}^{-4} \quad (\text{Constante de Stefan-Boltzmann}) \quad (\text{I.32})$$

