Apêndice F

Efeito Doppler via Fase de Onda

Suponha que uma onda eletromagnética plana se propaga na direção x com campo elétrico

$$E = E_0 e^{-i(kx-\omega t)} \tag{F.1}$$

O argumento

$$\phi = (kx - \omega t) \tag{F.2}$$

representa a fase da onda eletromagnética. A cada vez que ϕ varia de 2π, percorre-se um comprimento de onda. Desta forma ϕ conta e.g. o número de cristas de onda da radiação.

Suponha que foi medido em S um certo número de cristas de onda por um detector, por exemplo 5 cristas. Se no instante t e posição x foi medida a quinta crista de onda em S, temos que em S$'$, este evento também corresponderá à medida da quinta crista de onda, mas agora no instante t' e na posição x'. Desta forma a fase de onda deve ser a mesma em S e em S$'$:

$$\phi' = \phi \tag{F.3}$$

Podemos escrever

$$\phi = (kx - \omega t) = k(x - ct) = kc(\frac{x}{c} - t) = \omega(\frac{x}{c} - t) = 2\pi\nu(\frac{x}{c} - t) = 2\pi F \tag{F.4}$$

ou seja, o argumento F é precisamente a contagem de cristas de onda: a cada valor inteiro de F, a fase varia de um adicional de 2π e percorre-se um comprimento de onda. Assim, para

$$F = \nu(\frac{x}{c} - t) \tag{F.5}$$

devemos ter

$$F' = F\,. \tag{F.6}$$

Inserindo as transformações de Lorentz para x' e t', temos

$$\begin{aligned}
F' &= \nu'\left(\frac{x'}{c} - t'\right) \\
&= \nu'\left(\frac{\gamma}{c}(x - vt) - \gamma(t - vx/c^2)\right) \\
&= \nu'\gamma\left(\frac{x}{c}(1 + v/c) - t(1 + v/c)\right) \\
&= \nu'\gamma(1+\beta)\left(\frac{x}{c} - t\right) \qquad \text{(F.7)}
\end{aligned}$$

Como $F' = F$, devemos ter

$$\nu'\gamma(1+\beta) = \nu \tag{F.8}$$

mas

$$\gamma(1+\beta) = \frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(1+\beta)}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{F.9}$$

Portanto

$$\boxed{\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu} \tag{F.10}$$

Aqui derivamos o efeito Doppler quando a onda se propaga na mesma direção em que os referenciais se afastam (direção x). Pode-se considerar a propagação em uma direção arbitrária e deduzir também o efeito Doppler para propagação na direção perpendicular ao movimento dos referenciais, bem como o efeito de aberração (mudança de direção de propagação entre referenciais). Veja Moysés Vol. 4, § 6.8.