Apêndice E

Máximos de Difração

O padrão de intensidade na Difração for uma fenda simples de largura a é

$$I = I_0 \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2, \qquad x = \frac{\beta}{2} = \frac{ka \sin\theta}{2} \tag{E.1}$$

Vamos achar os máximos da função

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} \tag{E.2}$$

Temos

$$\frac{df}{dx} = \frac{2\sin x \cos x}{x^2} - 2\frac{\sin^2 x}{x^3} = (2\sin x)\frac{(x\cos x - \sin x)}{x^3} = 0 \tag{E.3}$$

Em $x = 0$ temos o máximo central. As soluções para $\sin x = 0$ são mínimos, pois $f(x) \geq 0$. Portanto $x\cos x - \sin x = 0$ deve corresponder aos máximos. Assim

$$x\cos x - \sin x = 0 \quad \to \quad \boxed{x = \tan x} \qquad \text{(Máximos de Difração)} \tag{E.4}$$

Podemos confirmar que são máximos, calculando a segunda derivada:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{2\cos x(x\cos x - \sin x)}{x^3} + 2\sin x \left(\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{x^3} - \frac{3(x\cos x - \sin x)}{x^4} \right) \tag{E.5}$$

Impondo $x\cos x - \sin x = 0$, temos

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -2\frac{\sin^2 x}{x^2} < 0 \tag{E.6}$$

Como a derivada segunda é explicitamente negativa, trata-se de máximos. Note que para os pontos $\sin x = 0$, a derivada segunda fica $2\cos^2 x/x^2 > 0$, sendo explicitamente positiva e correspondendo de fato a mínimos.

As soluções para $x = \tan x$, podem ser obtidas graficamente, da intersecção das funções $y = x$ e $y = \tan(x)$. Elas ocorrem em

$$x = \tan(x) \quad \to \quad x = 0, 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi, ... \tag{E.7}$$

O primeiro máximo ($x_1^{\max} = \tan x_1^{\max}$) após o máximo central ocorre em $x_1^{\max} = 1.43\pi$, ou seja

$$x_1^{\max} = \frac{ka \sin\theta_1^{\max}}{2} \approx \frac{\pi a \theta_1^{\max}}{\lambda} = 1.43\pi \tag{E.8}$$

Desta forma,

$$\boxed{\theta_1^{\max} = 1.43\frac{\lambda}{a}} \qquad \text{(Primeiro máximo de difração)} \tag{E.9}$$

Note que a aproximação de que o máximo está aproximadamente na metade do caminho entre 2 mínimos consecutivos seria de $\theta_1^{\max} \approx (\theta_1^{\min} + \theta_2^{\min})/2 = (1+2)/2\frac{\lambda}{a} = 1.5\frac{\lambda}{a}$, portanto não muito distante do valor exato.